Exemples de suites numériques : suites arithmétiques et suites géométriques

Table des Matières

Exemples de suites numériques : suites arithmétiques et suites géométriques

I. Moyenne arithmétique et moyenne géométrique de deux nombres

Activité 1

1. Soit un rectangle de côtés 2 et 3. Trouver le côté d'un carré qui a le même périmètre que ce rectangle.
2. Soit un rectangle de côtés 2 et 3. Trouver le côté d'un carré qui a la même aire que ce rectangle.

Définition

Soient a et b deux nombres réels positifs.

- La moyenne arithmétique des nombres a et b est $\dfrac{a+b}{2}$.
- La moyenne géométrique des nombres a et b est $\sqrt{ab}$ qui s'écrit $(ab)^{\frac{1}{2}} = (ab)^{0,5}$.

II. Suites arithmétiques

II. A. Les deux expressions d'une suite géométrique

Activité 2

On donne trois termes de trois suites, repérés les suites qui ont des progressions arithmétiques sur ces premiers termes :

1. $u_1 = 5$; $u_2 = 3$; $u_3 = 1$.
2. $v_7 = 8$; $v_8 = 7$; $v_9 = 9$.
3. $w_0 = 714$; $w_2 = 715,5$; $w_3 = 717$.

Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle est définie par un premier terme (souvent au rang 0 par u_0) et une relation appelée relation de récurrence de u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = u_n + R.$$

R est appelé raison de la suite (u_n).

Activité 3

une personne décide de faire des économies, elle met 400 euros de côté, puis chaque mois, elle ajoute 10 euros à ses économies.
On définit alors la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 400$ et la relation de $u_{n+1} = u_n + 10$, u_n représentant l'argent mis de côté au bout de n mois.

1. Calculer u_{12} et interpréter avec la situation.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Au bout de combien de mois l'argent mis de côté sera-t-il supérieur ou égale à 1 000 euros.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison R.
Pour tout nombre n, on a l'expression de u_n en fonction de n :

$$u_n = u_0 + nR$$

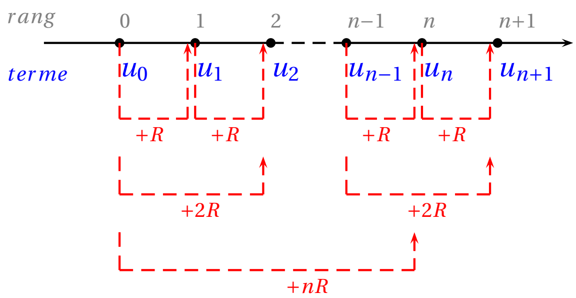
Réciproquement, si pour tout entier n, une suite u a pour expression $u_n = a + bn$, alors la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $R = b$.
La relation $u_n = u_0 + nR$ est appelée relation fonctionnelle de la suite (u_n).

Remarque

Par cette propriété, on a aussi les relations fonctionnelles suivantes :

$$u_n = u_1 + (n-1)R \text{ (pour } n \geqslant 1)$$
$$u_n = u_2 + (n-2)R \text{ (pour } n \geqslant 2)$$
$$\ldots$$

Schéma :



Exercice 1

Soit une suite (u_n) arithmétique telle que $u_0 = 240$ et de raison -2.

1. Calculer u_{30}.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n \leqslant 0$?

II. B. Exemple de représentation graphique

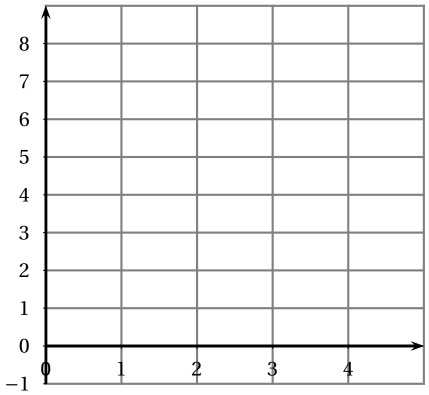
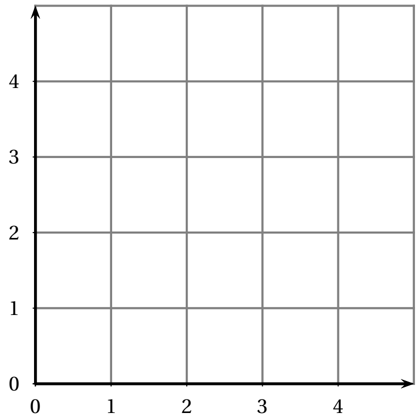
☞**Exercice 2**

Soit les suites (u_n) est (v_n) définies par :

u	v
$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 0,5 \\ v_0 = 4 \end{cases}$

Pour chacune des suites répondre aux questions suivantes en complétant le tableau ci-dessous :

1. Donner les relations fonctionnelles des deux suites, soit les expressions de u_n et v_n en fonction de n (voir schéma et définition).
2. Compléter la représentation graphique des points des deux suites.
3. Conjecturer les variations et la limite de chacune des suites.

relation fonctionnelle	$u_n =$	$v_n =$
exemples	$r > 0$ $r = 2$	$r < 0$ $r = -0,5$
		
variations		

II. C. Variations

✒ **Propriété**

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- si $r < 0$ la suite u est décroissante
- si $r = 0$ la suite u est constante
- si $r > 0$ la suite u est croissante

☞**Démonstration 1**

Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ puis conclure

II. D. Somme des termes d'une suite arithmétique

☞**Activité 4**

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 1.
Pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = u_n + 1$ et $u_1 = 1$.
On note $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

1. Calculer S_3, S_2 et S_5.
2. On souhaite calculer $S_{10} = 1+2+3+\dots+9+10$. Montrer que $S_{10} + S_{10} = 10 \times 11$.
3. En déduire S_{10}.

✒ **Propriété**

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
On note S_n la suite de la somme des termes : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ on note $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

On a aussi (si la somme commence au rang 1) :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

On peut retenir :

$$S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

☞**Démonstration 2**

admise

☞**Exercice 3**

Pour réussir un marathon (courir 42,2 km), une personne décide, pour son entrainement, de faire chaque semaine, notée n, une distance d_n, exprimée en km, telle que $d_0 = 10$ et $d_{n+1} = d_n + 2,5$.

1. Calculer d_1, puis d_2.
2. Exprimer d_n en fonction de n.
3. Son entrainement s'arrête la dixième semaine. Quelle distance aura-t-il parcouru cette dixième semaine ?
4. Quelle distance aura-t-il parcouru durant son entrainement spécifique du marathon ?
   On peut calculer la somme des distances de deux manières, avec ou sans la formule de la somme

III. Suites Géométriques

III. A. Les deux expressions d'une suite géométrique

☞**Activité 5**

On donne trois termes de trois suites, repérés les suites qui ont des progressions géométriques sur ces premiers termes :

1. $u_1 = 5$; $u_2 = 7,5$; $u_3 = 10$.
2. $v_0 = 14$; $v_0 = 42$; $v_9 = 126$.
3. $w_0 = 16$; $w_2 = 4$; $w_3 = 1$.

✒ **Définition**

Une suite (u_n) est dite géométrique si elle est définie par un premier terme (souvent au rang 0 par u_0) et une relation appelée relation de récurrence de u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = Qu_n.$$

Q est appelé raison de la suite (u_n).

☞**Exercice 4**

Une personne place le capital 400 euros sur un compte d'épargne dans une banque. Le compte est rémunéré au taux annuel d'intérêt composé de 2%.
On note u_n le capital disponible sur le compte au bout de n année.
On définit ainsi la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 400$ et la relation de $u_{n+1} = 1,02u_n$ (augmenter de t% une valeur chaque période revient à multiplier par $1 + t$% la valeur de chaque période).

1. Calculer u_5.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

✒ **Propriété**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison Q.
Pour tout nombre n, on a l'expression de u_n en fonction de n :

$$u_n = u_0 \times Q^n$$

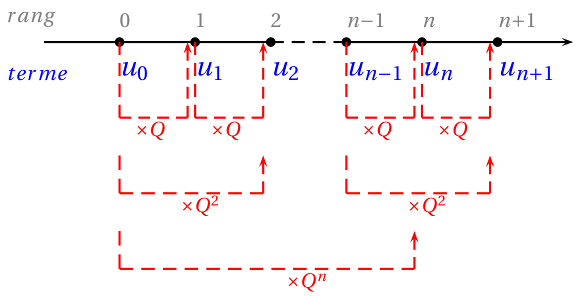
Réciproquement, si pour tout entier n, une suite u a pour expression $u_n = a \times b^n$, alors la suite u est géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $Q = b$.
La relation $u_n = u_0 \times Q^n$ est appelée relation fonctionnelle de la suite u.

Remarque

Par cette propriété, on a aussi les relations fonctionnelles suivantes :

$$u_n = u_1 \times Q^{n-1} \text{ (pour } n \geqslant 1)$$
$$u_n = u_2 \times Q^{n-2} \text{ (pour } n \geqslant 2)$$
$$\dots$$

Schéma :



Exercice 5

Soit une suite u géométrique de premier terme $u_0 = 5\,000$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer u_6.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

III. B. Exemple de représentation graphique

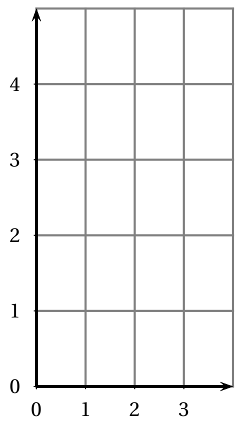
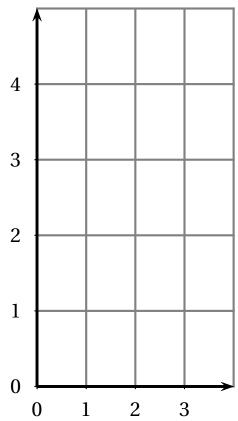
☞**Exercice 6**

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par :

u	v
$\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}5u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = 0{,}5v_n \\ v_0 = 4 \end{cases}$

Pour chacune des suites répondre aux questions suivantes en complétant le tableau ci-dessous :

1. Donner les relations fonctionnelles des quatre suites, soit les expressions de u_n, v_n en fonction de n (voir schéma et définition).
2. Compléter la représentation graphique des points des quatre suites.
3. Conjecturer les variations et la limite de chacune des suites.

relation fonctionnelle	$u_n =$	$v_n =$
exemples	$q > 1$ $q = 1{,}5$	$0 < q < 1$ $q = 0{,}5$
		
variations		

III. C. Variations

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison Q, $Q > 0$ et de premier terme u_0 tel que $u_0 > 0$.

- si $0 < Q < 1$ la suite u est décroissante
- si $Q = 1$ la suite u est constante
- si $Q > 1$ la suite u est croissante

☞**Exercice 7**

Soit une suite (u_n) géométrique de premier terme $u_2 = 24$ et de raison $\frac{1}{2}$. À partir de la calculatrice (table) déterminer à partir de quel rang n, $u_n < 0{,}25$.

III. D. Somme des termes d'une suite géométrique

☞**Activité 6**

Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.
Pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 1$.
On note $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ on note $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

1. Calculer S_3, S_2 et S_5.
2. On souhaite calculer $S_{10} = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9 + 2^{10}$. Montrer que $S_{10} - 2S_{10} = 1 - 2^{11}$.
3. En déduire S_{10}.

✒ **Propriété**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison Q.
On note S_n la suite de la somme des termes : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1 - Q^{n+1}}{1 - Q}$$

On a aussi (si la somme commence au rang 1) :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 \times \frac{1 - Q^n}{1 - Q}$$

On peut retenir :

$$S_n = (\text{premier de terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - raison}$$

☞**Démonstration 3**

admise

☞**Exercice 8**

Le loyer d'une maison augmente chaque année de 1,5%. En 2020 il vaut 525 euros mensuel soit 6300 euros annuel.
On note v_n le loyer de l'année $2020 + n$, ainsi $u_0 = 6300$.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Quel sera le prix du loyer annuel en 2029 ?
4. Calculer la somme total des loyers qui serait versés entre 2020 et 2029. *On peut calculer la somme des loyers de deux manières, avec ou sans la formule de la somme*