Approche historique de la fonction logarithme

Table des Matières

Approche historique de la fonction logarithme

I. Des équations à résoudre

Activité 1

À l'époque des babyloniens (IIe millénaire av. J.-C au VIe siècle av. J.-C.), on trouve des traces d'un commerce riche et abondant notamment entre les villes d'Assur et Kanesh. Quelques exemples de tablettes des archives des marchands assyriens exhumées à Kültepe (images du site Wikipédia) :

À cette époque on s'intéressait déjà à la question de connaitre le temps nécessaire pour doubler un capital C_0 à un taux d'intérêt de 20%. n représente le temps en année et C_n le capital disponible l'année n.

1. Exprimer C_n en fonction de n.
2. Justifier que la recherche de l'année à partir de laquelle le capitale double ne dépend pas de C_0.
   (Obtenir une équation que ne dépend pas de C_0.)
   Savez-vous résoudre cette équation ?
3. Déterminer les années entre lesquelles le capital double, donner les capitaux associés (arrondir à 0,01).
4. On note les deux réponses précédentes sous la forme $(n\ ;\ C_n)$, C_n est arrondi à 0,01, qui sont les coordonnées de deux points A et B dans un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.
   (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui dirige la droite (AB).
   (b) Déterminer l'abscisse x du point M de la droite (AB) d'ordonnée 2.
   (on pourra utiliser la colinéarité et la proportionnalité des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$).

Il semble que les babyloniens aient trouvé une réponse par interpolation linéaire, en trouvant la solution x :

$$\frac{\left(1+\frac{12}{60}\right)^4-\left(1+\frac{12}{60}\right)^3}{4-3}=\frac{2-\left(1+\frac{12}{60}\right)^3}{x-3}$$

Ils trouvent en base 60 $x=(3;47,13,20)$ *soit le nombre* $x=3+\frac{47}{60}+\frac{13}{60^2}+\frac{20}{60^3}$.

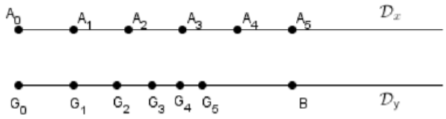
II. Travaux de Neper

Activité 2

Napier ou Neper théologien, mathématicien, physicien, astronome (Écossais, 1550 - 1671) édite deux traités :

- En 1614 : Mirifici Logarithmorum canonis descriptio
- En 1619 (par son fils) : Mirifici Logarithmorum canonis constructio

Soient deux demi-droites $\mathscr{D}_x$ et $\mathscr{D}_y$:



- Sur $\mathscr{D}_x$ on considère une progression arithmétique :

$$L = A_0A_1 = \ldots = A_kA_{k+1}$$

- Sur $\mathscr{D}_y$ on considère une progression géométrique telle que $G_0B = 1$ et $q \in]0\,;\,1[$ (Neper avait choisit $G_0B = 10^7$ pour des raisons astronomiques) :

$$q = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \ldots = \frac{G_{k+1}B}{G_kB}$$

1. (a) Montrer que $A_2A_0 = 2 \times L$ puis que $A_3A_0 = 3L$.
   (b) Exprimer (sans justifier) A_kA_0 en fonction de k et L.
   (c) Montrer que $G_1B = q$ puis que $G_2B = q^2$.
   (d) Exprimer (sans justifier) G_kB en fonction de q.
2. Neper associe les grandeurs A_0A_k et G_kB, ainsi le logarithme de Neper, que nous noterons LOGNEP de G_kB est égal à A_0A_k : $LOGNEP(G_kB) = A_0A_k$.
   (a) Que vaut $LOGNEP(1)$?
   (b) Que vaut $LOGNEP\left(q\right)$?
   (c) Montrer que $LOGNEP\left(q^k\right) = LOGNEP\left(G_kB\right) = kLOGNEP(q)$ (relation algébrique fondamentale).

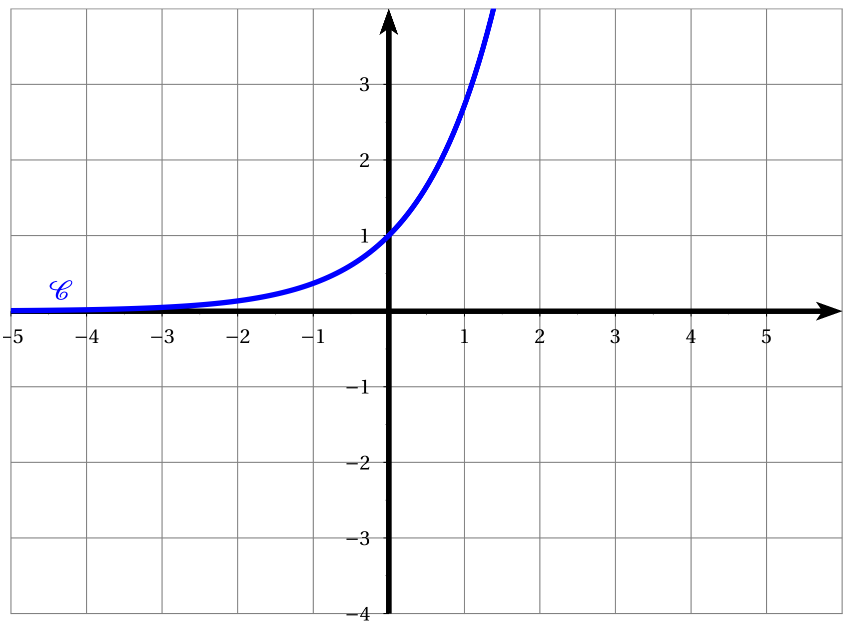
Le logarithme ainsi définit est discret, la difficulté pour Neper a été de le rendre continu.

III. Le logarithme népérien (définition actualisée)

III. A. Définition et représentation graphique

☞Activité 3

Soit la courbe de la fonction exponentielle représentée par par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ suivant :



1. Justifier le nombre de solution de l'équation $e^x = k$ où k est un réel.

2. Donner l'unique solution de l'équation $e^x = 1$.

3. À l'aide de la calculatrice donner la valeur arrondie à 10^{-2} de l'unique solution de l'équation $e^x = 2$.

4. Le tableau de valeurs suivant donne les valeurs arrondies à 10^{-2} des solutions de l'équation $e^x = k$, ces solutions x qui dépendent du nombre réel k sont notées $\ln(k)$:

k	$0,1$	$0,5$	1	2	3	4	5
$\ln(k) = x$							

5. On vient de définir la fonction logarithme népérien ln (en hommage à Neper) :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \ln(k) \end{array}$$

   À l'aide du tableau de valeurs précédent, construire la courbe de la fonction ln sur le graphique précédent.

6. Donner l'équation de l'axe de symétrie des deux courbes du graphique.

✒ Définition

Pour k réel strictement positif, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution réelle x notée $\ln(k)$.
On définit alors la fonction la fonction logarithme népérien ln (en hommage à Neper) :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \ln(k) \end{array}$$

On a :

- $\forall k \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(k)} = k$
- $\forall k \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x\right) = \ln(k) = x$ soit $\ln(e^x) = x$

On dit que les fonctions ln et exp sont réciproques.
Pour la suite $\ln(k)$ sera noté $\ln(x)$ ou $\ln(t)$ le plus souvent.

✒ Remarque

- $\ln(1) = 0$,
- $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$,
- La fonction logarithme est continue et strictement croissante $\mathbb{R}_+^*$.
- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$

III. B. Propriété algébrique

✒ Propriété

Soient a et b deux nombres strictement positifs :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

☞Démonstration 1

Comparer $e^{\ln(ab)}$ et $e^{\ln(a)+\ln(b)}$.

Propriété

Soient a et b deux nombres strictement positifs, $n \in \mathbb{Z}$.

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Démonstration 2

- Calculer de deux manières : $\ln\left(b \times \dfrac{1}{b}\right)$.
- Avec les deux propriétés déjà démontrées, calculer manières : $\ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right)$.
- Montrer le résultat pour $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = -1$ et $n = -2$ on admettra le résultat pour $n \in \mathbb{Z}$.
- Calculer de deux manières : $\ln\left(\sqrt{x}^2\right)$.

Exercice 1

Montrer que pour tout nombre x strictement positif :

1. $\ln\left(x^3\right) - \ln(x) = 2\ln(x)$
2. $\ln(xe^x) = x + \ln(x)$
3. $\ln(x\sqrt{x}) = \dfrac{3}{2}\ln(x)$
4. $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -2\ln(x)$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x) = 2$
2. $e^x = 2$
3. $\ln(x) = \dfrac{-1}{2}$
4. $e^x = \dfrac{1}{2}$
5. $\ln(3x) - \ln(2) = 0$
6. $2\ln(x) = 1$
7. $\ln\left(x^2\right) = 1$

Exercice 3

Quel est le temps nécessaire pour doubler un capital C_0 à un taux d'intérêt de 20%. n représente le temps en année et C_n le capital disponible l'année n. Trouver la réponse en utilisant la fonction logarithme ln. Comparer avec le résultat de l'activité 1.

III. C. dérivabilité et propriétés analytiques

Propriété

La fonction logarithme est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Si u est une fonction strictement positive définie sur un intervalle I, la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I :

$$\forall x \in I, (\ln(u))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration 3

Soit x strictement positif et la relation $e^{\ln(x)} = x$

1. Exprimer la dérivée $\left(e^{\ln(x)}\right)'$ puis la dérivée $(x)'$.
2. En déduire $(\ln(x))'$ et la continuité de la fonction logarithme.

La deuxième propriété est admise.

Propriété

La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 4

Laissée en exercice et faire le tableau de variation de la fonction ln en plaçant $\ln(1)$

Propriété

- $\forall x \in]0;1[; \ln(x) < 0$
- $\forall x \in]1;+\infty[; \ln(x) > 0$

Démonstration 5

Par la lecture du tableau de variations, faites le tableau de signe $\ln(x)$.

Propriété

- $\forall a$ et $b \in]0\,;\ +\infty[$,
- $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$.

Démonstration 6

Cette propriété est une conséquence des variations de la fonction ln.

☞**Exercice 4**

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par :

- $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 1,25u_n \end{cases}$
- $\begin{cases} v_0 = 30 \\ v_{n+1} = 0,75v_n \end{cases}$

1. Résoudre algébriquement $u_n > 50$
2. Résoudre algébriquement $v_n < 5$

✒ **Propriété**

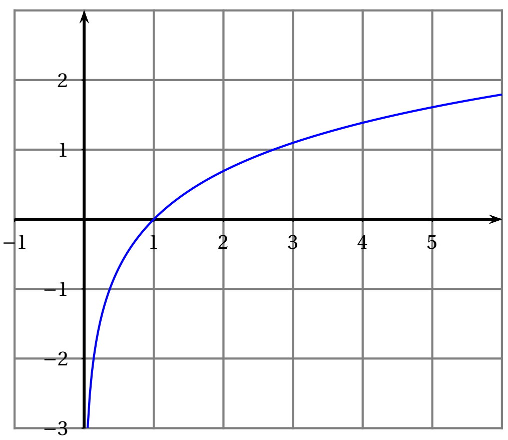
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

☞**Démonstration 7**

Admise

Résumé des propriétés précédentes :

x	0		1		$+\infty$
$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$		$+$	1	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	



☞**Exercice 5**

Déterminer l'équation de la tangente en 1. Tracer cette tangente sur le graphique précédent.

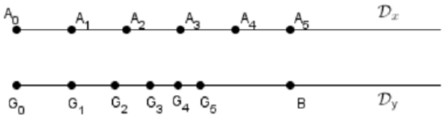
☞**Exercice 6**

Les questions sont indépendantes :

1. Étudier les variations de la fonction f : sur $]0;+\infty[$, $f(x) = 3x^2 + x - 4\ln(x)$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{5}{x}\mathrm{d}x$

IV. Retour au logarihtme de Neper

☞**Activité 4**



Neper rendra le logarithme continu en utilisant la cinématique :

- Sur $\mathscr{D}_x$ le mouvement est uniforme, de A_0 vers A_1, la vitesse v est constante.
- Sur $\mathscr{D}_y$:
  - À l'instant 0, en G_0 la vitesse est v.
  - À chaque instant, la vitesse du mobile est proportionnelle à la distance qui le sépare de B, on note C la constante de proportionnalité.

En notant A l'emplacement du premier mobile à l'instant t sur la demi-droite $\mathscr{D}_x$ et G l'emplacement du deuxième mobile sur la droite $\mathscr{D}_y$ à l'instant t, avec $G_0G(t) = y(y)$ et $A_0A = x(t)$ on a :

$$x'(t) = v$$

$$y' = C(10^7 - y)$$

C est une constante réelle.
D'autre part $x'(0) = y'(0) = v$, les mobiles sont animés de la même vitesse en départ.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = C(10^7 - y)$ en fonction de C.
2. Exprimer $y'(t)$ en fonction de C. En déduire $y'(0)$ et $x'(0)$ en fonction de C.
3. Résoudre l'équation différentielle $x' = C10^7$
4. en déduire y en fonction de x.
5. On pose $GB = z$, ainsi $z = 10^7 - y$. En déduire x en fonction de z.

Remarque : $LOGNEP(z)$, le logarithme de Neper est approximativement x en fonction de z.

V. Le logarithme décimal

V. A. Briggs et Euler

☞Activité 5

Dans son Introduction à l'analyse infinitésimale (traduction française de 1796), Léonhard Euler (1707-1783) reprend les travaux de Briggs donne un algorithme pour calculer logarithme de 5.
Cet algorithme se généralise calculer tous les logarithmes décimaux entre 1 et la base $\mathscr{B}$ du logarithme souhaité (c'est le principe de dichotomie).

Soit la baſe logarithmique $a = 10$, qui eſt celle des tables ordinaires, & propoſons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre eſt renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes ſont 0 & 1, on procédera de la maniere ſuivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à des limites, qui ne different plus du nombre propoſé 5.

$A = 1,000000$;	$lA = 0,0000000$	ſoit
$B = 10,000000$;	$lB = 1,0000000$;	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3,162277$;	$lC = 0,5000000$;	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5,623413$;	$lD = 0,7500000$;	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4,216964$;	$lE = 0,6250000$;	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4,869674$;	$lF = 0,6875000$;	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5,232991$;	$lG = 0,7187500$;	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5,048065$;	$lH = 0,7031250$;	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4,958069$;	$lI = 0,6953125$;	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5,002865$;	$lK = 0,6992187$;	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4,980416$;	$lL = 0,6972656$;	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4,991627$;	$lM = 0,6982421$;	$N = \sqrt{KM}$
$N = 4,997242$;	$lN = 0,6987304$;	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5,000052$;	$lO = 0,6989745$;	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4,998647$;	$lP = 0,6988525$;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4,999350$;	$lQ = 0,6989135$;	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4,999701$;	$lR = 0,6989440$;	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4,999876$;	$lS = 0,6989592$;	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4,999963$;	$lT = 0,6989668$;	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5,000008$;	$lV = 0,6989707$;	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4,999984$;	$lW = 0,6989687$;	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4,999997$;	$lX = 0,6989697$;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5,000003$;	$lY = 0,6989702$;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5,000000$;	$lZ = 0,6989700$;	

Ainſi, en prenant des moyennes proportionnelles, on eſt parvenu à trouver $Z = 5,000000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en ſuppoſant la baſe logarithmique $= 10$. Par conſéquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'eſt de cette maniere que Briggs & Ulacq ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

Voici une traduction de cet algorithme :

$x \leftarrow 5$
$A \leftarrow 1$
$B \leftarrow 10$
$Log_A \leftarrow 0$
$Log_B \leftarrow 1$
Tant que $|B - A| > 10^{-3}$ faire
    Si $\sqrt{AB} \leqslant x$ faire
        $A \leftarrow \sqrt{AB}$
        $Log_A \leftarrow \dfrac{Log_A + Log_B}{2}$
    fin si
    Si $\sqrt{AB} > x$ faire
        $B \leftarrow \sqrt{AB}$
        $Log_B \leftarrow \dfrac{Log_A + Log_B}{2}$
    fin si
fin tant que

```python
from math import*

def BriggsLog(x,B,p):
    '''
    calcul le logarithme de x en base B
    avec une précision de 10^(-p)
    '''
    A=1
    logA=0
    logB=1
    while abs(A-B)>10**(-p):
        if sqrt(A*B)<=x:
            A=sqrt(A*B)
            logA=(logA+logB)/2
        if sqrt(A*B)>x:
            B=sqrt(A*B)
            logB=(logA+logB)/2
        #print(A,logA,B,logB)
    return round(logA,p)
```

briggs_log.py

1. Que donne l'algorithme pour $x = 5$; $B = 10$ et $p = -6$ soit $\log(5)$ (logarithme de 5 en base 10) ?

2. Que donne l'algorithme pour $x = 2$; $B = 10$ et $p = -3$ soit $\log(5)$ (logarithme de 5 en base 10) ?

V. B. Définition

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.
La fonction $\log_a$ définit par :

$$\begin{array}{rccl} \log_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln a} \end{array}$$

est appelée logarithme en base a.
Cas particulier le logarithme est décimal est définit par :

$$\begin{array}{rccl} \log_{10} : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln 10} \end{array}$$

Exercice 7

1. Pour tout réel x strictement positif, simplifier $10^{\log_{10}(x)}$
2. Pour tout réel x, simplifier $\log_{10}\left(10^x\right)$

Exercice 8

Soit $a > 0$, déterminer le tableau de variations de la fonction $\log_a$ suivant les valeurs de a.

VI. Algorithme de Brouncker

VI. A. Historique

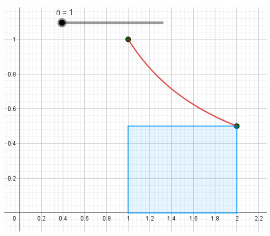
William Brouncker (anglais 1620-1684), était un linguiste et mathématicien.
Docteur de philosophie (université d'Oxford) en 1647, il est l'un des fondateurs et le premier président de la Royal Society, en 1660. En 1662, il devient chancelier de la reine Catherine, puis maître de l'hôpital Sainte-Catherine.

Ses travaux mathématiques portent en particulier sur la rectification (mesure des longueurs) de la parabole et de la cycloïde ainsi que sur la quadrature (mesure des aires) de l'hyperbole. Il est le premier, en Angleterre, à s'intéresser aux fractions continues généralisées, notamment $\dfrac{4}{\pi}$.

VI. B. Principe et algorithme

Dans un repère orthogonal, soit l'hyperbole sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $0 < a < b$.
La fonction f est la fonction inverse sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
Si on choisit $a = 1$ on détermine alors $\ln(b)$.

1. Pour $n = 1$, on considère l'aire $\mathscr{A}_1$ du rectangle formé par les points de coordonnées $(a\,;\,0)$, $(b\,;\,0)$, $(b\,;\,f(b))$, $(a\,;\,f(b))$.
   $\mathscr{A}_1 = (b-a)f(b) = \dfrac{b-a}{b} = 1 - \dfrac{a}{b}$.
   Pour $a = 1$, $\mathscr{A}_1 = 1 - \dfrac{1}{b}$.



2. Pour n entier supérieur ou égale à 2 et j variant de 1 à $n-1$; i variant de 0 à $2^j - 1$ avec un pas de 2, on considère les rectangles formés par les points de coordonnées :
   - $(a + hi\,;\,f(a + h(i+2)))$

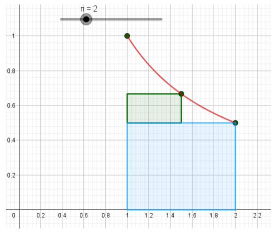


Figure pour $n=3$

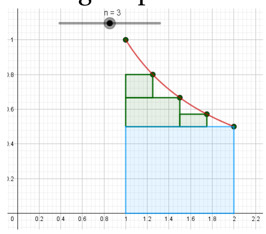
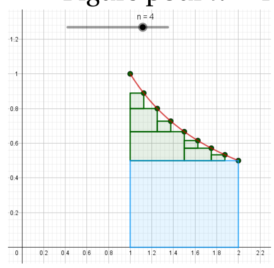


Figure pour $n=4$



- $(a+h(i+1)\ ;\ f(a+h(i+2)))$
- $(a+h(i+1)\ ;\ f(a+h(i+1)))$
- $(a+hi, f(a+h(i+1)))$
- Avec $h=\dfrac{b-a}{2^j}$

L'aire $\mathscr{A}_i$ d'un rectangle est
$\mathscr{A}_i = h(f(a+h(i+1))-f(a+h(i+2)))$
$\mathscr{A}_i = h\left(\dfrac{1}{a+h(i+1)}-\dfrac{1}{a+h(i+2)}\right)$
$\mathscr{A}_i = \dfrac{h^2}{a^2+ah(2i+3)+h^2(i+1)(i+2)}$

j	i	i	i	i	h
$j=1$	$i=0$				$\frac{b-a}{2}$
$j=2$	$i=0$	$i=2$			$\frac{b-a}{4}$
$j=3$	$i=0$	$i=2$	$i=4$	$i=6$	$\frac{b-a}{8}$

Figure pour $n=2$

La somme des aires des rectangles converge vers $\ln(b)-\ln(a)$
Pour $a=1$ et $b=2$, on trouve
$h=\dfrac{1}{2^j}$.

$$\mathscr{A}_i = \frac{1}{2^j}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2^j}(i+1)}-\frac{1}{1+\frac{1}{2^j}(i+2)}\right)=\frac{1}{2^j}\left(\frac{2^j}{2^j+i+1}-\frac{2^j}{2^j+i+2}\right)=\frac{1}{(2^j+i+1)(2^j+i+2)}$$

j	$i\ ;\ \mathscr{A}_i$	$i\ ;\ \mathscr{A}_i$	$i\ ;\ \mathscr{A}_i$	$i\ ;\ \mathscr{A}_i$	h
$j=1$	$i=0\ ;\ \dfrac{1}{3\times 4}$				$\frac{1}{2}$
$j=2$	$i=0\ ;\ \dfrac{1}{5\times 6}$	$i=2\ ;\ \dfrac{1}{7\times 8}$			$\frac{1}{4}$
$j=3$	$i=0\ ;\ \dfrac{1}{9\times 10}$	$i=2\ ;\ \dfrac{1}{11\times 12}$	$i=4\ ;\ \dfrac{1}{13\times 14}$	$i=6\ ;\ \dfrac{1}{15\times 16}$	$\frac{1}{8}$

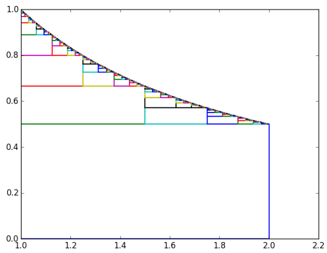
On admet que $\ln(2)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$

```python
#algorithme de Brouncker

import matplotlib.pyplot as plt


def f(x):
    return 1/x

def aire_rectangle(A,B,C,D):
    return (B[0]-A[0])*(D[1]-A[1])

def rectangle(A,B,C,D):
    return plt.plot([A[0],B[0],C[0],D[0],A[0]],[A[1],B[1],C[1],D[1],A[1]] ,linewidth=1.5)

def brouncker(a,b,n):
    A=[a,0]
    B=[b,0]
    C=[b,f(b)]
```

```
    D=[a,f(b)]
    rectangle(A,B,C,D)
    s=aire_rectangle(A,B,C,D)
    for j in range(1,n):
        h=(b-a)/(2**j)
        for i in range(0,int(2**(j)),2):
            A=[a+h*i,f(a+h*(i+2))]
            B=[a+h*(i+1),f(a+h*(i+2))]
            C=[a+h*(i+1),f(a+h*(i+1))]
            D=[a+h*i,f(a+h*(i+1))]
            rectangle(A,B,C,D)
            s=s+aire_rectangle(A,B,C,D)
    plt.show()
    return s
```

brouncker.py

In [1]: brouncker(1,2,10)
Out[1]: 0.6926591377284118



In [2]: brouncker(0.5,1,10)
Out[2]: 0.6926591377284118