Richesses et inégalités, épidémies, convexité d'une fonction

Table des Matières

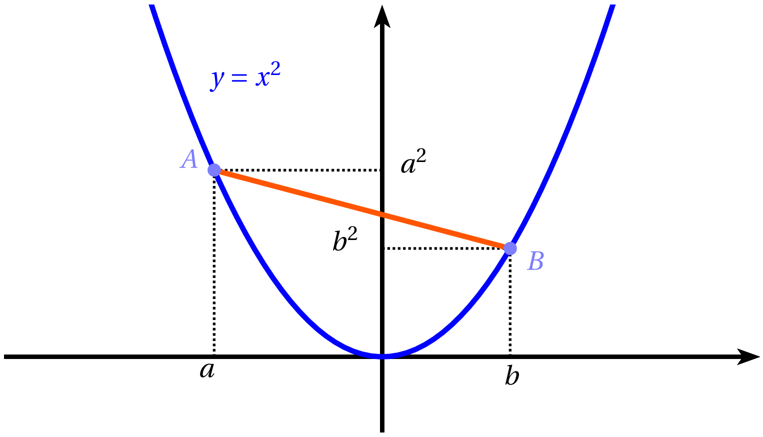
Richesses et inégalités, épidémies, convexité d'une fonction

I. Convexité

I. A. Introduction

Activité 1

Soit la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthogonal $\left(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\right)$.
Le but de l'activité est de montrer que sur un intervalle $[a\,;\ b]$, avec A de coordonnées $(a\,; a^2)$ et B de coordonnées $(b\,;\ b^2)$, une corde de la parabole se situe au-dessus de cette dernière.
On dit que la fonction carré est **convexe**.



1. Justifier que la corde a pour équation $y = (a+b)x - ab$.
2. Montrer que pour tout réel x, $x^2 - [(a+b)x - ab] = (x-a)(x-b)$.
   On pourra vérifier que a et b sont racines de la fonction polynôme $x^2 - [(a+b)x - ab]$.
3. En déduire le signe de $x^2 - ((a+b)x - ab)$ sur l'intervalle $[a\,;\ b]$.

I. B. Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\right)$.

1. On dit que f est **convexe** sur l'intervalle I si la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de toutes ses cordes sur l'intervalle I.
2. On dit que f est **concave** sur l'intervalle I si la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de toutes ses cordes sur l'intervalle I.

I. C. Propriétés

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\right)$.

- Si f est convexe sur I alors f' est croissante sur I et f'' est positive.
- Si f est concave sur I alors f' est décroissante sur I et f'' est négative.

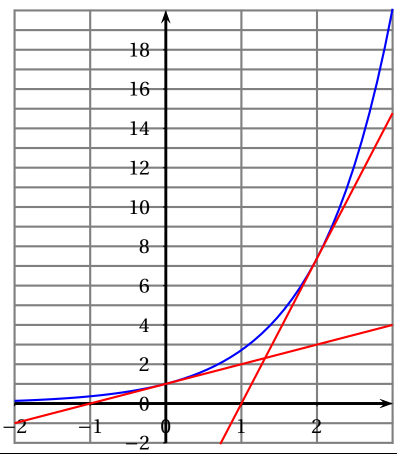
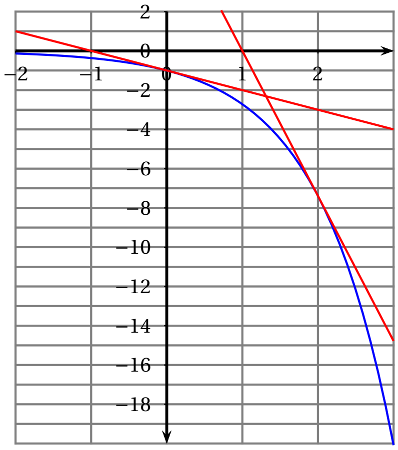
☞**Démonstration 1**

admise

✒ Théorème

Soit une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; I; J)$.

- Si la fonction f est convexe sur I alors sa courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes.
- Si la fonction f est concave sur I alors sa courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de toutes ses tangentes.

fonction convexe	fonction concave
	

☞**Démonstration 2**

Supposons f convexe sur I et $x_0 \in I$.
La tangente à $\mathscr{C}$ en x_0 a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Étudions le signe de l'expression $g(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$:

1. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$. En déduire les variations de g'.
2. Montrer que $g'(x) = 0$ admet une unique solution, x_0, sur I (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).
3. Compléter le tableau de variations et de signe suivant :

x	a		x_0		b
variations g					
signe g'					
variations g'					
signe g''		$+$		$+$	

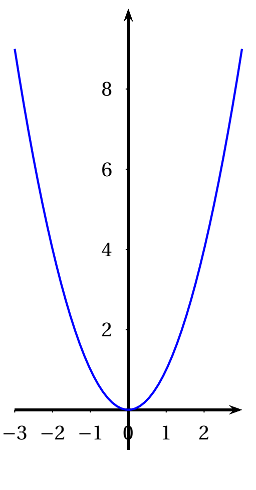
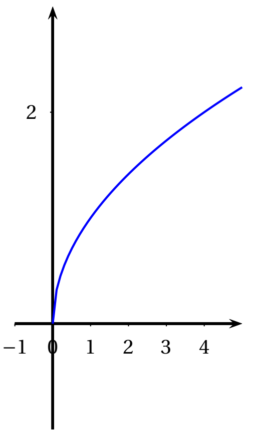
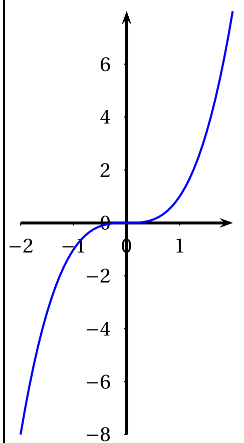
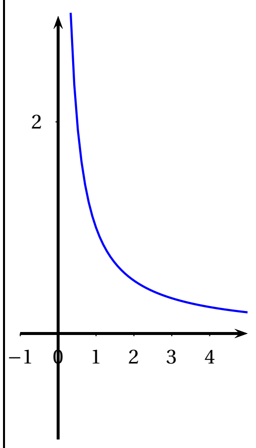
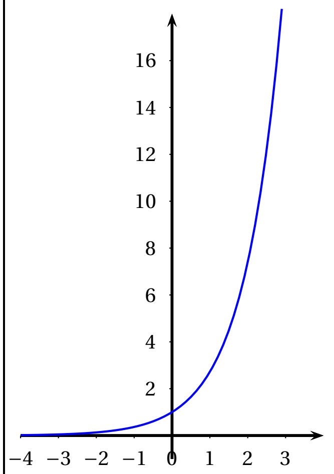
4. Conclure

☞**Exercice 1**

Soit les fonctions carré, racine carrée, cube, inverse et exponentielle définies et dérivable respectivement sur $\mathbb{R}$, $]0\,;\,+\infty[$, $\mathbb{R}$, $]0\,;\,+\infty[$ et $\mathbb{R}$:

- $f_1(x)=x^2$
- $f_2(x)=\sqrt{x}$
- $f_3(x)=x^3$
- $f_4(x)=\dfrac{1}{x}$
- $f_5(x)=e^x$

Pour chacune des fonctions, calculer $f_i'(x)$ puis $f_i''(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de f' appelée dérivée seconde de f.
On rappelle que le coefficient directeur d'une tangente en x_0 est le nombre dérivé $f'(x_0)$. Pour chaque fonction, étudier le signe de $f''(x)$ et interpréter graphiquement en terme de croissance du coefficient directeur des tangentes.

<table>
<tr><td>$f_1(x)=x^2$</td><td>$f_2(x)=\sqrt{x}$</td><td>$f_3(x)=x^3$</td><td>$f_4(x)=\dfrac{1}{x}$</td><td>$f_5(x)=e^x$</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

I. D. Applications économiques

I. D. 1. Courbe de Lorenz

☞**Exercice 2**

Max Otto Lorenz (1876-1959) était un économiste américain qui a décrit les inégalités de revenus à l'aide d'une courbe portant son nom (1905). Pendant la préparation de son doctorat à l'université de Wisconsin, il publia un article décrivant sa courbe. Son doctorat fut publié en 1906, il portait sur « La théorie économique des prix de chemin de fer » et ne fait aucune référence à ce qui a certainement été son plus célèbre article.

Le terme courbe de Lorenz semble avoir été utilisé pour la première fois en 1912 dans un livre intitulé *The elements of Statistical Method* (Les principes de la méthode statistique).

On appelle courbe de Lorenz $\mathscr{L}$ la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

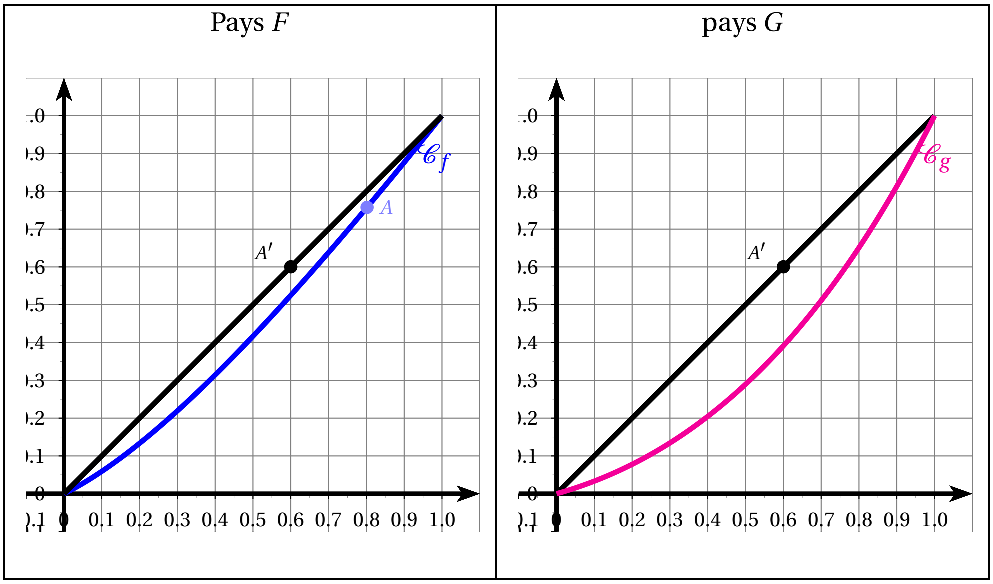
- L est définie sur $[0\,;\,1]$,
- L est continue et croissante sur $[0\,;\,1]$,
- $L(0)=0$ et $L(1)=1$
- L est convexe sur $[0\,;\,1]$.
- Pour tout réel x, $L(x)\leqslant x$ (la droite $y=x$ est une corde de la courbe de Lorenz).

Soit deux fonctions f est g représentant respectivement la répartition des salaires dans deux pays F et G, la variable x

est la part de la population la plus pauvre du pays. On donne les représentations graphiques des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$,

$$\begin{array}{rrcl} f: & [0\,;\,1] & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ & x & \longmapsto & 1,5x+\dfrac{1}{x+1}-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g: & [0\,;\,1] & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ & x & \longmapsto & e^x-(e-2)x-1 \end{array}$$



Le but de l'exercice est de démontrer que les courbes qui modélisent la répartition des revenus des deux pays sont des courbes de Lorenz et de donner l'interprétation de ces courbes.
Lecture et interprétation du graphique dans le pays F :

- Le point A sur la courbe $\mathscr{C}_f$ indique que 80% de la population la plus pauvre possède $f(0,8) \simeq 0,76 = 76\%$ des revenus et donc que 20% de la population la plus riche possède 24% des revenus.
- Le point A' sur la droite $y = x$ indique l'équilibre : 60% de la population la plus pauvre possède 60% des revenus et donc que 40% de la population la plus riche possède 40% des revenus.

1. Calculer et interpréter $g(0,7)$.
2. À partir du signe de $f''(x)$ et $g''(x)$, montrer que les fonctions f est g sont convexes .
3. Compléter les tableaux de variations et signes suivants :

fonction f

x	0 1
variations f	
signe f'	
variations f'	
signe f''	

fonction g

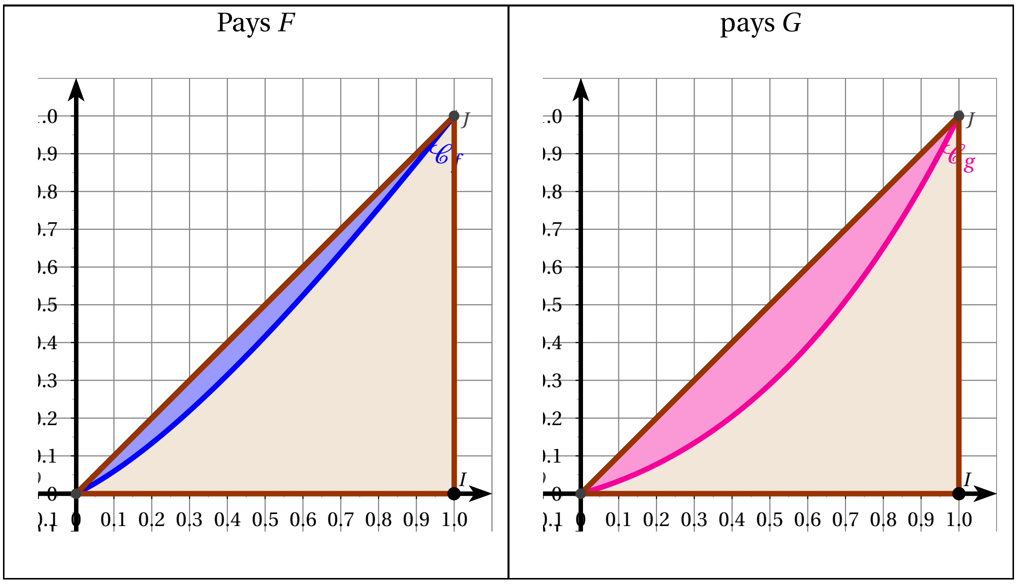
x	0 1
variations g	
signe g'	
variations g'	
signe g''	

4. En déduire que les courbes des fonctions f est g sont bien des courbes de Lorenz.
5. Quel pays semble avoir une répartition plus équitable ?

I. D. 2. Coefficient de Gini

☞**Exercice 3**

Corrado Gini (1884-1965) est un statisticien, démographe, ethnologue, sociologue et idéologue italien.
Le coefficient de Gini est un nombre compris entre 0 et 1 qui indique la répartition d'une variable (salaire, revenus, patrimoine) au sein d'une population, il mesure le niveau d'inégalité de la répartition d'une variable dans la population.
s'il vaut 0, il signifie l'égalité parfaite et s'il valait 1 (ne peut être atteint), il signifierait une inégalité parfaite (une seule personne dispose de tous les revenus et toutes les autres n'ont aucun revenu).
On considère les deux courbes de Lorenz précédentes :



On désigne par $\mathscr{A}_f$ l'aire entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et $\mathscr{A}_g$ l'aire entre la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
On note $\mathscr{A}_T$ l'aire du triangle rectangle OIJ.

Les coefficients de Gini γ_f et γ_g sont donnés par

$$\gamma_f = \frac{\mathscr{A}_f}{\mathscr{A}_T}$$

$$\gamma_g = \frac{\mathscr{A}_g}{\mathscr{A}_T}$$

On admet que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \simeq 0{,}057$.

1. Calculer le coefficient de Gini γ_f.
2. Calculer le coefficient de Gini γ_g.
3. Quel pays a la répartition des revenus la plus équitable ? Justifier en comparant les coefficients de Gini.

II. Point d'inflexion

II. A. Définition

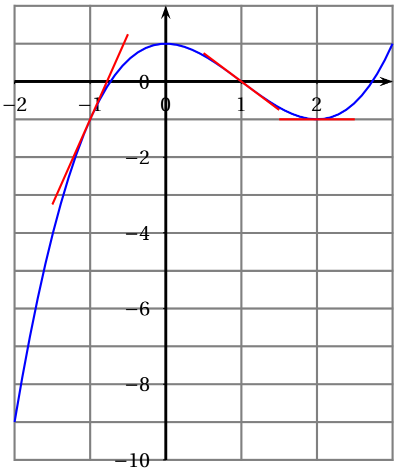
Définition

Soit une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I ouvert. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de f', $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$.
On dit que f admet un point d'inflexion en x_0 si $f''(x_0) = 0$ et $f''(x)$ change de signe en x_0 :

- $f''(x_0) = 0$; $\forall x \in]a; x_0[, f''(x) < 0$ et $\forall x \in]x_0; b[, f''(x) > 0$
  La courbe $\mathscr{C}$ passe de concave à convexe. ou
- $f''(x_0) = 0$; $\forall x \in]a; x_0[, f''(x) > 0$ et $\forall x \in]x_0; b[, f''(x) < 0$
  La courbe $\mathscr{C}$ passe de convexe à concave.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 1$ dont on donne la courbe représentative ci-dessus.
Justifier que f admet un point d'inflexion en 1.



II. B. Application en biologie

Exercice 5

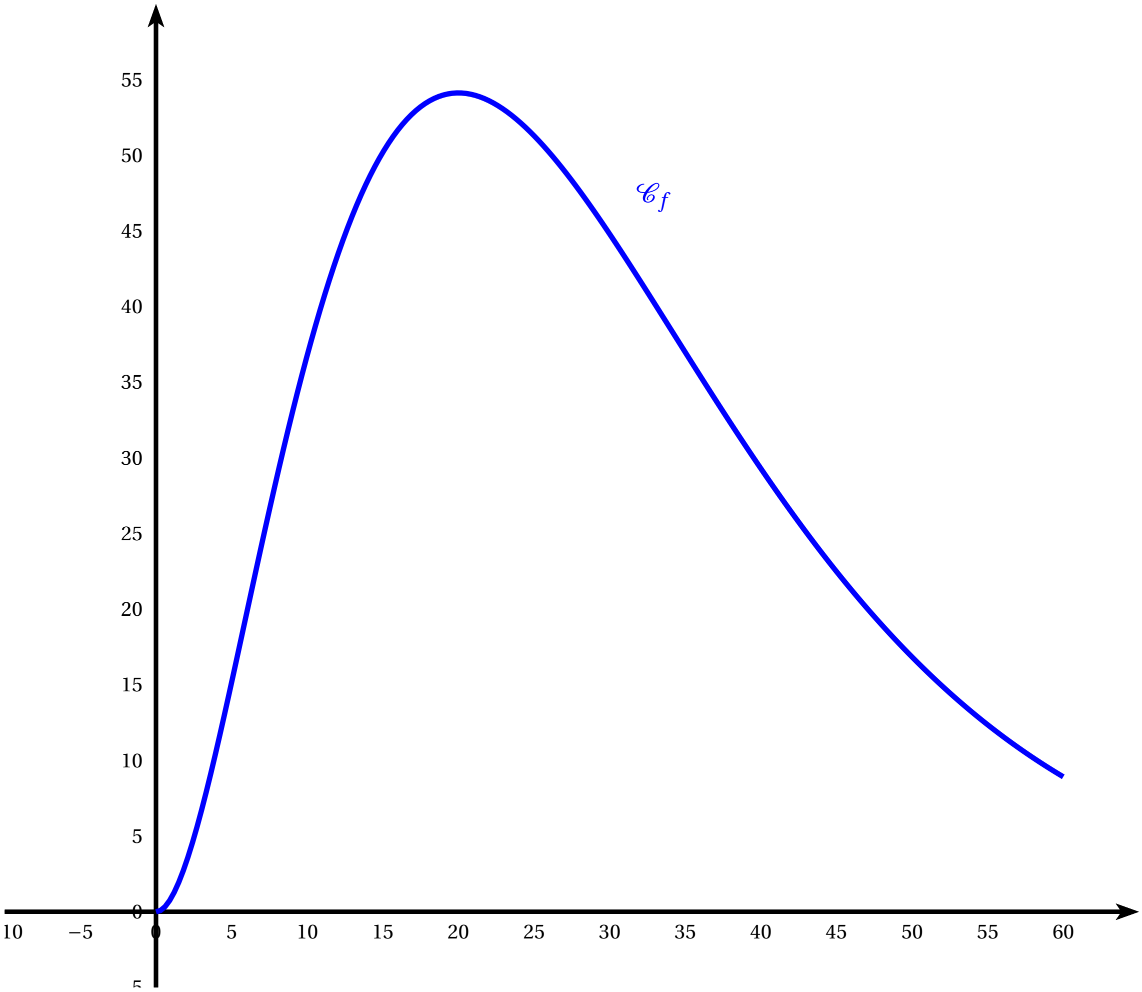
On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,;\,60] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t) = t^2 e^{-0,1t} \end{array}$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.
Pour étudier les propriétés de la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0,1t(20 - t)e^{-0,1t}$, f' est la dérivée de f,
- $f''(t) = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{-0,1t}$, f'' est la dérivée de f',
- $F(t) = -10t^2 - 200t - 2000)e^{-0,1t}$, F est une primitive de f.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$.



1. Déterminer les variations de f.
2. Montrer que f admet deux points d'inflexions, interpréter.
3. Déterminer le nombre moyen de malades par jour sur la période $[0\,;\,60]$.