Fonction polynôme du second degré
Définition et forme canonique

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Définition

On appelle fonction polynôme du second degré f, une fonction qui au nombre réel x associe le nombre réel $ax^2 + bx + c$, où a est un nombre réel non nul et b et c deux nombres réels.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = ax^2 + bx + c \end{array}$$

.

Définition, exemple

Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$.

- $f_1 : x \mapsto f_1(x) = 3x^2 - x + 2$
  $f_1(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = -1$ et $c = 2$.
  f_1 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_2 : x \mapsto f_2(x) = x^2$
  $f_2(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$.
  f_2 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_3 : x \mapsto f_3(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3}$
  $f_3(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = 0$ et $c = \dfrac{-1}{3}$.
  f_3 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_4 : x \mapsto f_5(x) = x^2 + 1 - x(x-5)$
  $f_4(x) = x^2 + 2 - x^2 + 5x = 5x + 1$
  $f_4(x)$ est de la forme $mx + p$ avec $m = 5$ et $p = 1$
  f_4 est une fonction affine.

Définition, exemple

Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$.

- $f_1 : x \mapsto f_1(x) = 3x^2 - x + 2$
  $f_1(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = -1$ et $c = 2$.
  f_1 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_2 : x \mapsto f_2(x) = x^2$
  $f_2(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$.
  f_2 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_3 : x \mapsto f_3(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3}$
  $f_3(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = 0$ et $c = \dfrac{-1}{3}$.
  f_3 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_4 : x \mapsto f_5(x) = x^2 + 1 - x(x - 5)$
  $f_4(x) = x^2 + 2 - x^2 + 5x = 5x + 1$
  $f_4(x)$ est de la forme $mx + p$ avec $m = 5$ et $p = 1$
  f_4 est une fonction affine.

Définition, exemple

Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$.

- $f_1 : x \mapsto f_1(x) = 3x^2 - x + 2$
  $f_1(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = -1$ et $c = 2$.
  f_1 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_2 : x \mapsto f_2(x) = x^2$
  $f_2(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$.
  f_2 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_3 : x \mapsto f_3(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3}$
  $f_3(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = 0$ et $c = \dfrac{-1}{3}$.
  f_3 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_4 : x \mapsto f_5(x) = x^2 + 1 - x(x-5)$
  $f_4(x) = x^2 + 2 - x^2 + 5x = 5x + 1$
  $f_4(x)$ est de la forme $mx + p$ avec $m = 5$ et $p = 1$
  f_4 est une fonction affine.

Définition, exemple

Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$.

- $f_1 : x \mapsto f_1(x) = 3x^2 - x + 2$
  $f_1(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = -1$ et $c = 2$.
  f_1 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_2 : x \mapsto f_2(x) = x^2$
  $f_2(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$.
  f_2 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_3 : x \mapsto f_3(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3}$
  $f_3(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = 0$ et $c = \dfrac{-1}{3}$.
  f_3 est une fonction polynôme du second degré.
- $f_4 : x \mapsto f_5(x) = x^2 + 1 - x(x - 5)$
  $f_4(x) = x^2 + 2 - x^2 + 5x = 5x + 1$
  $f_4(x)$ est de la forme $mx + p$ avec $m = 5$ et $p = 1$
  f_4 est une fonction affine.

Forme canonique, exemple

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 5$.

On rappelle les identités remarquables :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$f(x) = 3x^2 - 24x + 5$$
$$f(x) = 3(x^2 - 8x) + 5 \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Forme canonique, exemple

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 5$.

On rappelle les identités remarquables :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - 24x + 5 & & \\
f(x) &= 3(x^2 - 8x) + 5 & (A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\
f(x) &= 3(\color{blue}{x^2} - \color{red}{2 \times 4 \times x}) + 5 & (A-B)^2 &= \color{blue}{A^2} - \color{red}{2AB} + B^2 \\
& & (x-4)^2 &= \color{blue}{x^2} - \color{red}{2 \times x \times 4} + 4^2
\end{aligned}
$$

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 5$.

On rappelle les identités remarquables :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$f(x) = 3x^2 - 24x + 5$

$f(x) = 3(x^2 - 8x) + 5 \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$f(x) = 3(x^2 - 2 \times 4 \times x) + 5 \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(x-4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$

$f(x) = 3[(x-4)^2 - 16] + 5 \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(x-4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 16$

$(x-4)^2 - 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 16 - 16$

$(x-4)^2 - 16 = x^2 - 2 \times x \times 4$

Forme canonique, exemple

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 5$.

On rappelle les identités remarquables :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$f(x) = 3x^2 - 24x + 5$	
$f(x) = 3(x^2 - 8x) + 5$	$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$f(x) = 3(x^2 - 2 \times 4 \times x) + 5$	$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$f(x) = 3[(x-4)^2 - 16] + 5$	$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$f(x) = 3(x-4)^2 - 3 \times 16 + 5$	
$f(x) = 3(x-4)^2 - 43$	

Vérification :
$3(x-4)^2 - 43 = 3(x^2 - 8x + 16) - 43 = 3x^2 - 24x + 48 - 43 =$
$3x^2 - 24x + 5 = f(x)$

Forme canonique, cas général

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On rappelle les identités remarquables :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Forme canonique, exemple

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^2 + bx + c$.

On rappelle les identités remarquables :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x\right) + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Forme canonique, exemple

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On rappelle les identités remarquables :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x\right) + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a}$$

Forme canonique, exemple

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On rappelle les identités remarquables :
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x\right) + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$f(x) = {\color{blue}a}\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$f(x) = {\color{blue}a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - {\color{blue}a} \times \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right)$$

$${\color{red}f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

Forme canonique, exemple

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, on a deux **formes canoniques** de f :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** de f.

Forme canonique, exemple

Soit la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 5$.
$a = 3$, $b = -24$ et $c = 5$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 516$ et $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-24}{6} = -4$

La forme canonique de f est :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) = 3\,(x-4)^2 - \frac{516}{4 \times 3}$$

$$f(x) = 3\,(x-4)^2 - 43$$

FIN