Fonctions trigonométriques

1 Fonctions paires et impaires et fonctions périodiques

1.1 Fonctions paires et impaires

Soit une fonction f définie dans un intervalle $I = [-a\ ;\ a]$, représentée par une courbe $\mathcal{C}$ dans un repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$.

Définition :
La fonction f est paire si pour tout réel x de I, $f(-x) = f(x)$. La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
La fonction f est impaire si pour tout réel x de I, $f(-x) = -f(x)$. La courbe $\mathcal{C}$ admet l'origine du repère O pour centre de symétrie.

Exemple :

- La fonction carré est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = x^2$.
- La fonction inverse est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

1.2 Fonctions périodiques

Soit une fonction f définie dans un intervalle $\mathbb{R}$, représentée par une courbe $\mathcal{C}$ dans un repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$.
P est un nombre réel.

Définition :
La fonction f est périodique de période P si pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x+P) = f(x)$.

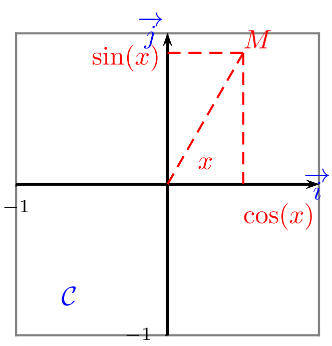
2 Fonctions sinus et cosinus

Définitions :
Soit un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j})$ et le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. On définit le cosinus et le sinus d'un nombre réel x par les coordonnées du point M tel que :

- M est un point du cercle trigonométrique,
- $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = x$,

$$M(cos(x)\ ;\ sin(x))$$

Figure :



On définit ainsi deux fonctions sur $\mathbb{R}$:

- $\cos : x \longmapsto \cos(x)$
- $\sin : x \longmapsto \sin(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(x + 2\pi) =$ .... donc la fonction cos est
- $\sin(x + 2\pi) =$ .... donc la fonction sin est

Ainsi on peut restreindre l'intervalle d'étude $\mathbb{R}$ des fonctions cos et sin à $[-\pi\ ;\ \pi]$.

- $\cos(-x) =$ .... donc la fonction cos est
- $\sin(-x) =$ .... donc la fonction sin est

Ainsi on peut restreindre l'intervalle d'étude $[-\pi\ ;\ \pi]$ des fonctions cos et sin à $[0\ ;\ \pi]$.

3 Continuité et dérivabilité

Théorème :
Les fonctions cos et sin sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$. On a :

- $\cos'(x) = -\sin(x)$,
- $\sin'(x) = \cos(x)$.

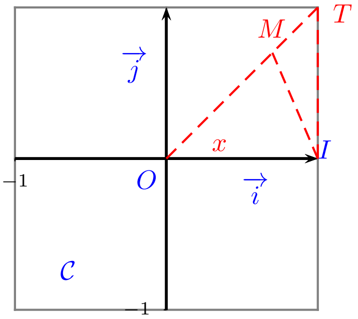
Démonstrations :
On rappelle est deux formules de trigonométrie suivantes :

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a + b) = \sin(a) cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

1. Dérivabilité :

   (a) Montrons que la fonction sin est dérivable en 0 :

   i. Soit le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, les points I et J de coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 1)$, le point M du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = x\ ;\ x \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et le point T intersection de la perpendiculaire à l'axe $(O\vec{i})$ en I avec la droite (OM). Donner les coordonnées de M et T en fonction de x.



   ii. En comparant l'aire du triangle OIM, l'aire de la partie de disque (secteur) OIM et l'aire du triangle OIT, montrer que $\dfrac{\sin(x)}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\tan(x)}{2}$.

   iii. En déduire que pour tout x dans $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$.

   iv. En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(x)}{x}$.

   v. Soit le fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $\left]\dfrac{-\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que f est paire.

   En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sin(x)}{x}$.

   vi. En déduire la dérivabilité de la fonction sin en 0.

   (b) Montrons que la fonction cos est dérivable en 0 :

i. D'après 1), pour tout x de $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) < x$. En utilisant le relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, montrer que pour tout x de $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos^2(x) > 1 - x^2$ et $\cos(x) > 1 - x^2$.

ii. En déduire que pour tout $x \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $-x < \frac{\cos(x) - 1}{x} < 0$.

iii. En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\cos(x) - 1}{x}$.

iv. Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$, montrer que la fonction g est impaire. En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\cos(x) - 1}{x}$.

v. En déduire la dérivabilité de la fonction cos en 0.

(c) Montrer que cos est dérivable en un point a de $\mathbb{R}$ soit que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h}$ existe et vaut $-\sin(a)$,

(d) Montrer que sin est dérivable en un point a de $\mathbb{R}$ soit que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$ existe et vaut $\cos(a)$,

2. En déduire que les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$.

4 Variations de signe des fonctions sinus et cosinus

Compléter les tableaux de variations et signes suivants :

x	$-\pi$ $\quad 0 \quad$ π
$Signe\,\sin(x)$	
$Variations\,\cos$	

x	$-\pi$ $\quad -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad$ π
$Signe\,\cos(x)$	
$Variations\,\sin(x)$	

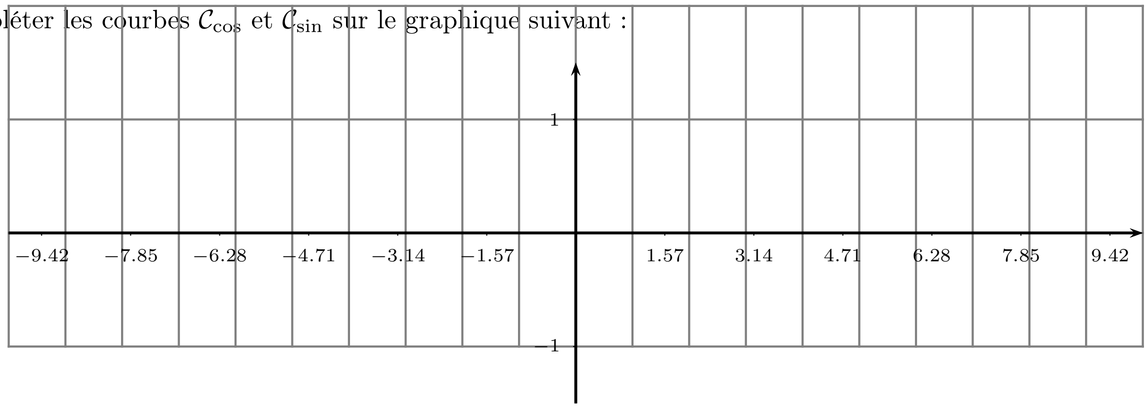
5 Représentation graphique des fonction trigonométriques

On notera $\mathcal{C}_{\cos}$ la courbe du cosinus d'équation $y = \cos(x)$ et $\mathcal{C}_{\sin}$ la courbe du cosinus d'équation $y = \sin(x)$. Le tableau de valeurs remarquables sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ permet de trouver les premiers points de la courbe $\mathcal{C}_{\cos}$ et de la courbe $\mathcal{C}_{\sin}$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$									
$\sin(x)$									

D'autre part, pour tout x de $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

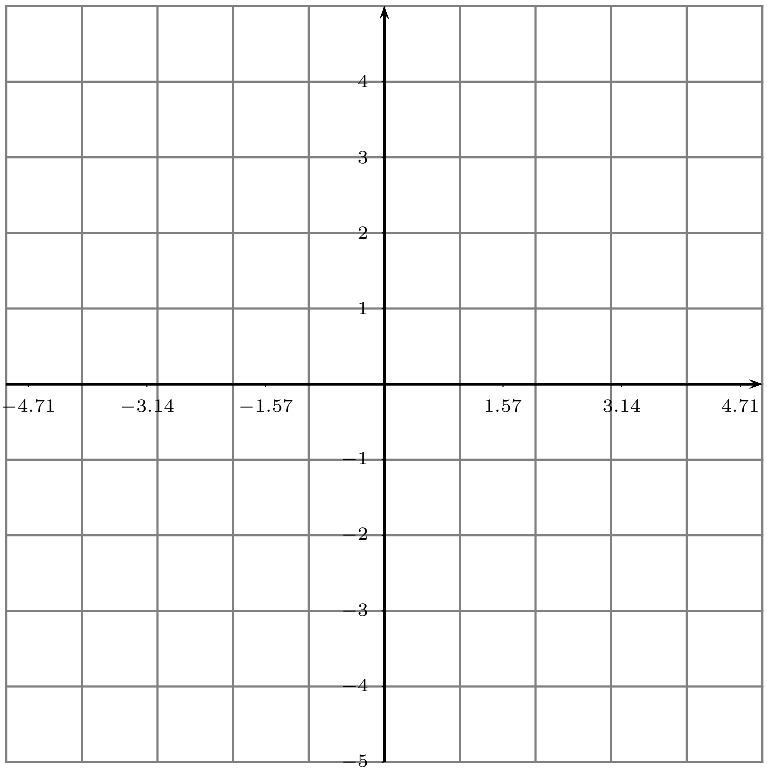
Compléter les courbes $\mathcal{C}_{\cos}$ et $\mathcal{C}_{\sin}$ sur le graphique suivant :



6 Exercice : la fonction tangente

Soit la fonction tan définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on note $\mathcal{C}_{tan}$ la courbe de la fonction tan dans un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \tan(x)$, que peut-on en déduire ?
2. Monter que pour tout nombre x de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(-x) = -\tan(x)$ et $tan(x+\pi) = \tan(x)$. Quelle est la période de la fonction tan ?
3. Justifier que tan est dérivable et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, en déduire le tableau de variations de tan sur $\left]\dfrac{-\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. Donner le tableau de valeurs remarquables de $\tan(x)$.
5. Compléter le graphique suivant par la représentation de la fonction tan :


4
3
2
1
−4.71
−3.14
−1.57
1.57
3.14
4.71
−1
−2
−3
−4
−5