Probabilités conditionnelles

Table des Matières

Probabilités conditionnelles

I. Introduction par les fréquences en ligne et en colonne

Activité 1

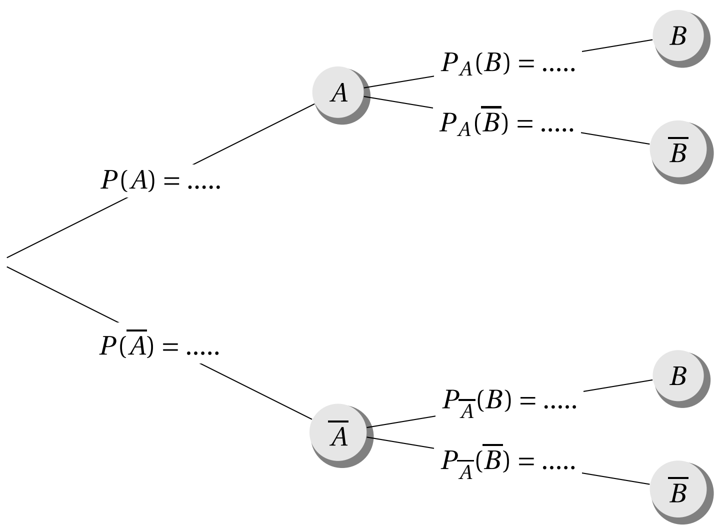
Dans une agence de voyage, on observe les réservations répertoriées par des fiches :

	Europe	Reste du monde	Total
En famille	200	50	
En couple	600	350	
Total			

1. Compléter le tableau.
2. On choisit au hasard une fiche de réservation parmi l'ensemble. On admet que toutes les fiches ont la même probabilité d'être choisies (on parle d'équiprobabilité).
   On note A l'événement « la réservation est une fiche famille » et $\overline{A}$ l'événement contraire de A.
   On note B l'événement « la réservation est une fiche dont la destination est l'Europe » et $\overline{B}$ l'événement contraire de B.
   Calculer les probabilités $P(A)$, $P(\overline{A})$
3. Calculer $P(A \cap B)$ et interpréter par une phrase.
4. (a) Sachant que la fiche de réservation est pour une famille (parmi les fiches destinées aux familles), calculer la probabilité que la fiche de réservation destinée à l'Europe, c'est la probabilité $P_A(B)$ cette probabilité.
   On rappelle que $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

   (b) De la même manière, rédiger une phrase qui exprime les probabilités $P_A(\overline{B})$, $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$; puis les calculer.

   (c) Compléter l'arbre suivant qui se déduit d'une lecture en ligne du tableau des effectifs des fiches de réservations :



5. De la même manière, faire l'arbre correspondant à une lecture en colonne du tableau des effectifs des fiches de réservations.

Définition

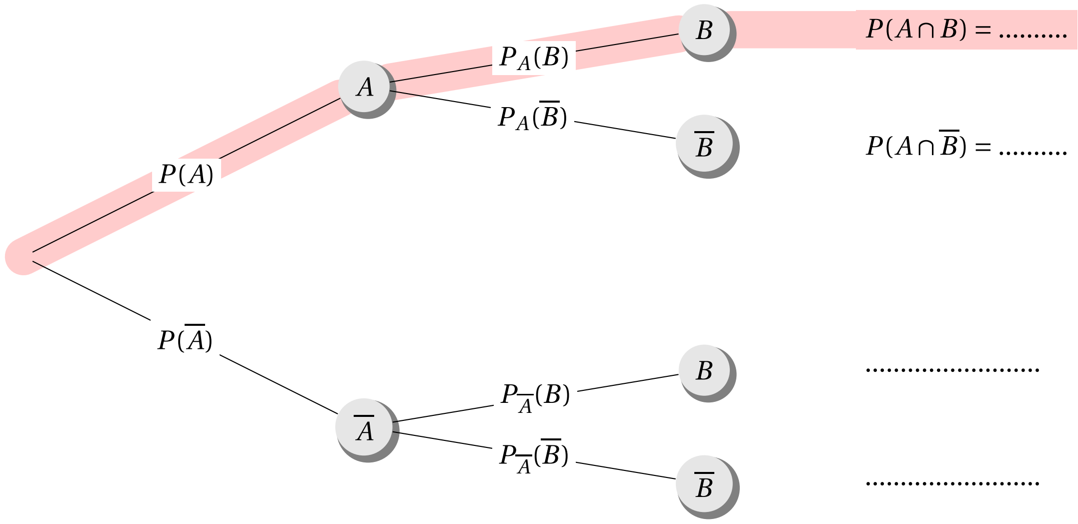
Rappel de la classe de Première Soit une probabilité définie sur un ensemble Ω. Soient A et B deux événements non vides de Ω.
La probabilité conditionnelle de B sachant A (ou B parmi A), notée $P_A(B)$, est donnée par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (1)$$

ce qui équivaut à :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad (2)$$

II. Lecture sur l'arbre pondéré de probabilités



Propriété

La somme des probabilités à chaque nœud de l'arbre est 1 :
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$
$P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$
$P_{\overline{A}}(B) + P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1$

Démonstration 1

- A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω ainsi, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$,
- Dans A, B et $\overline{B}$ forment une partition de A, ainsi $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
- Dans $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ forment une partition de $\overline{A}$, ainsi $P_{\overline{A}}(B) + P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1$.

Propriété

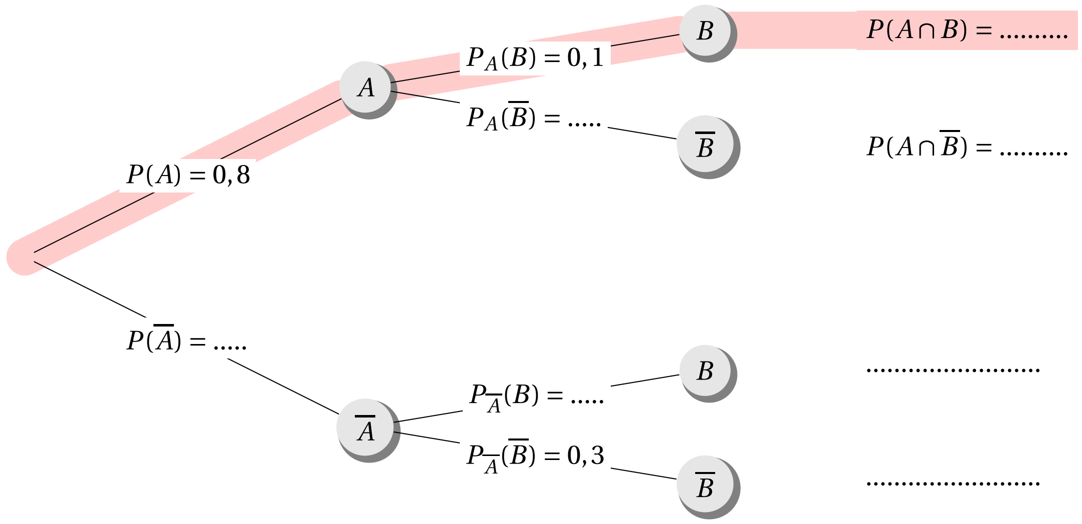
La somme des probabilités des intersections au bout de l'arbre est 1 :
$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1$

Démonstration 2

Les intersections $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$forment une partition de l'univers Ω, ainsi
$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\Omega) = 1$.

☞**Exercice 1**

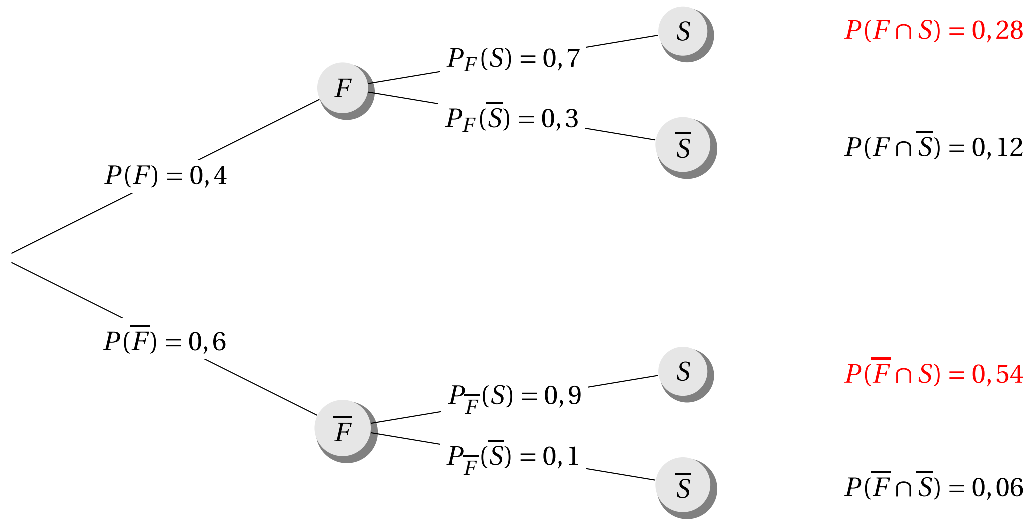
Compléter l'arbre de pondéré de probabilités suivant et compléter par les probabilités des intersections :



III. Formule des probabilités totales

☞**Activité 2**

Dans une classe, on s'intéresse aux personnes qui pratiquent un sport suivant le sexe :
On choisit au hasard une personne de la classe et on note :
F l'événement la personne est un fille et S l'événement la personne pratique un sport.



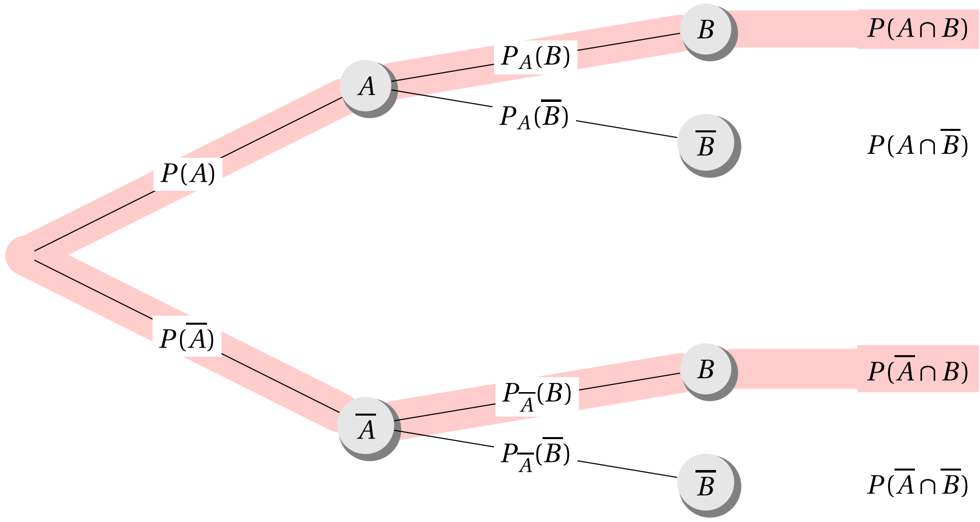
1. Dans Ω, donner une partition de S.
2. Calculer la probabilité de l'événement S.
3. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{S}$ de deux manières.

Propriété

Formule des probabilités totales :

Soient une probabilité P sur un ensemble Ω et A et B deux événements non vides de Ω.

On considère l'arbre de probabilité suivant :



B est la réunion des événements disjoints (ou incompatibles) $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, c'est à dire $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, autrement dit, $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ forment une partition de B.

Alors on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \tag{3}$$

Démonstration 3

Les intersections $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ forment une partition de l'événement B, ainsi $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 2

On réalise un test médical sur une population dont on estime à 10% la proportion de malade. Le test détecte ou pas si la personne est atteinte par la maladie.

- La probabilité que le test soit positif sur une personne malade est $0,9$.
- La probabilité que le test soit négatif sur une personne non malade est $0,9$.

On note les événements suivants :

- M la personne est malade
- T le test est positif.

1. Faire un arbre pondéré de probabilités de la situation en indiquant au bout de l'arbre les probabilités des intersections des événements.
2. Calculer la probabilité de l'événement T.
3. En déduire la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit effectivement malade.
4. (Pour aller plus loin) Réaliser l'arbre pondéré de probabilités contraire.

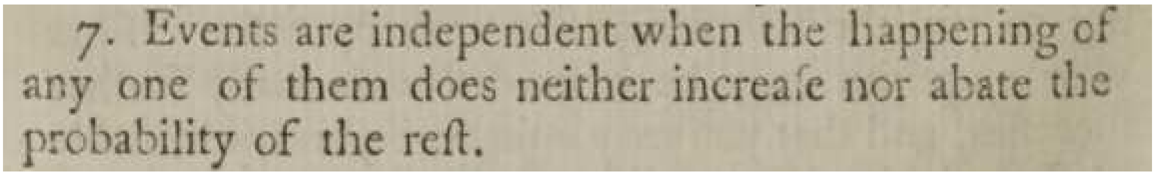
IV. Indépendance de deux événements

☞**Activité 3**

Une urne contient 3 boules rouges, une bleue et une verte. On réalise deux tirages successifs, le but de l'activité est de comparer des tirages avec remise ou sans remise.

1. Tirage avec remise : on tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur. On note A et B les événements "la boule au premier tirage est rouge" et "la boule au deuxième tirage est rouge".
   (a) Faire un arbre de la situation.
   (b) Calculer $P(A)$ puis $P(B)$ puis $P(A \cap B)$.
   (c) Calculer $P_A(B)$ puis $P_B(A)$.
2. Tirage sans remise : on tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on ne la remet pas dans l'urne et on tire à nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur. On note A et B les événements "la boule au premier tirage est rouge" et "la boule au deuxième tirage est rouge".
   (a) Faire un arbre de la situation.
   (b) Calculer la probabilité $P(A)$ puis $P(B)$ puis $P(A \cap B)$.
   (c) Calculer $P_A(B)$ puis $P_B(A)$.
3. Dans quelle situation a-t-on $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$?

Bayes définie la notion de deux événements indépendants :


7. Events are independent when the happening of any one of them does neither increaſe nor abate the probability of the reſt.

text original sur https://royalsocietypublishing.org/

Deux évènements sont indépendants lorsque la survenue du premier ne modifie pas la probabilité du second.

✒ **Définition**

Soit un univers Ω et P une probabilité définie sur Ω. On dit que A et B deux événements non vides sont indépendants si : $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.
Dans ce cas on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

☞**Exercice 3**

Soient deux événements indépendants A et B d'un univers Ω et P une probabilité définie que Ω tels que $P(A) = 0,1$ et $P(B) = 0,6$. Déterminer $P(A \cup B)$.

✒ **Propriété**

Si A et B deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont deux événements indépendants.

☞**Démonstration 4**

admise