Loi binomiale

Table des Matières

Loi binomiale

I. Introduction

Jacques ou Jakob Bernoulli (1654 - 1705) est un mathématicien et physicien suisse.
Dans *Ars Conjectandi* (1713), Jacques Bernoulli considère le problème de calcul, connaissant le nombre de cailloux tirés d'une urne, de la proportion des différents cailloux colorés de l'urne. Ce problème est connu comme le problème de probabilité inverse, et a été un sujet de recherche au XVIII^{e} siècle qui a attiré l'attention de Abraham de Moivre et de Thomas Bayes.
Bernoulli utilise alors le mot latin urna, qui initialement signifie un vase d'argile, mais ce mot est également utilisé dans la Rome antique pour tout type de boite pour collecter des bulletins de vote ; aujourd'hui encore le mot italien pour urne électorale est urna. Le mot de Bernoulli est peut-être issu de la loterie, des élections ou des jeux de hasard qui consistent à tirer une boule d'un récipient.

II. Exemples de répétition d'épreuves de Bernoulli : Loi binomiale, activités

☞**Activité 1**

Un questionnaire de QCM (questions à choix multiples) est composé de n questions, comportant chacune 4 réponses possibles dont une seule est correcte.
Un candidat répond au hasard à chaque question.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de réponse(s) exacte(s) du candidat sur l'ensemble des n questions.

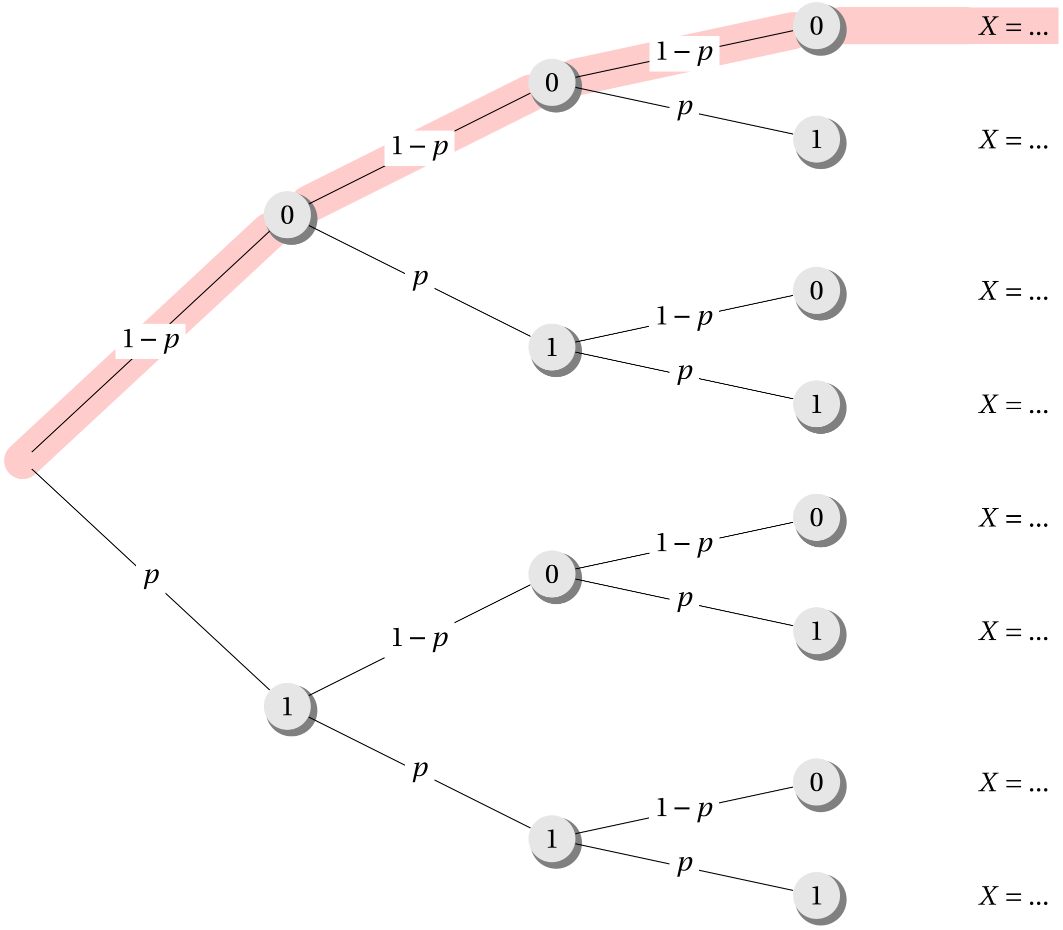
1. Première situation, le QCM comporte une seule question, cas $n = 1$:
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   (b) Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités et déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est à dire $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ (reconnaître la loi de la variable X).
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
2. Deuxième situation, le QCM comporte deux questions, cas $n = 2$:
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   (b) Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités et déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est à dire $P(X = 0)$; $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
3. Troisième situation, le QCM comporte trois questions, cas $n = 3$:
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   (b) Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités et déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est à dire $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
4. Quatrième situation, le QCM comporte quatre questions, cas $n = 4$:
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   (b) Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités et déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est à dire $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$; $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

III. Définition d'une loi binomiale

Définition

Soit la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes.
La variable X compte le nombre de succès.

$X \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ \dots\ ;\ n\}$.
Voici une représentation dans le cas où $n = 3$



On note $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n\ ;\ p)$ qui se lit, la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale de paramètres n et p.

IV. Loi de probabilités d'une loi binomiale

Propriété

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi Binomiale de paramètres n et p.
La loi de probabilité de probabilité de la variable X est :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre de chemins qui mènent à k succès parmi n expériences. Ces chemins sont appelés coefficients binomiaux.

Démonstration 1

admise

✒ **Remarque**

- $\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1, p)$.
- Pour $n = 2$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$.
- Pour $n = 3$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$.

V. Coefficients binomiaux

☞**Activité 2**

Relation entre les coefficients binomiaux

Soit un schéma de Bernoulli de n expériences et k un entier compris entre 0 et n.

1. A l'aide d'un arbre donner $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Compléter l'arbre et donner $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. Dans la construction de l'arbre à compléter, trouver une relation entre $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4. Justifier $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$.
5. (Pour aller plus loin) Justifier $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$.

✒ **Propriété**

Soit un schéma de Bernoulli de n expériences et k un nombre entier compris entre 0 et n.

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$$

Le triangle de Pascal pour $n \leqslant 5$:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Exemple de lecture des propriétés dans le triangle de Pascal :

- $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Blaise Pascal est un mathématicien, physicien, philosophe français (1623-1662).
À 19 ans, il invente la première machine à calculer. Il développe deux principaux axes de recherches, il publie un traité de géométrie projective à seize ans ; ensuite il développe en 1654 une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donnant naissance au cours du XVIII^{e} siècle au calcul des probabilités, influencera fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

VI. Espérance d'une loi binomiale

✒ **Propriété**

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

- l'espérance de X, $E(X)$, est $E(X) = np$

☞**Démonstration 2**

admise

☞**Exercice 1**

Un FAI (fournisseur d'accès internet) effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2000 clients. Chaque client indique s'il est satisfait ou non du service.
La probabilité qu'un client choisi au hasard dans ce panel soit satisfait du service fourni par le FAI est de 76,25 %.
On choisit au hasard 3 clients parmi ceux du panel. On admet que le panel est suffisamment important pour assimiler les choix des 3 clients à des tirages identiques et indépendants.

1. Déterminer la probabilité qu'exactement 1 client ne soit pas satisfait du service fourni par le FAI.
2. Calculer $P(X = 1000)$ et interpréter cette probabilité.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfaire du service fourni par le FAI.
4. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter.