Logarithme décimal

Table des Matières

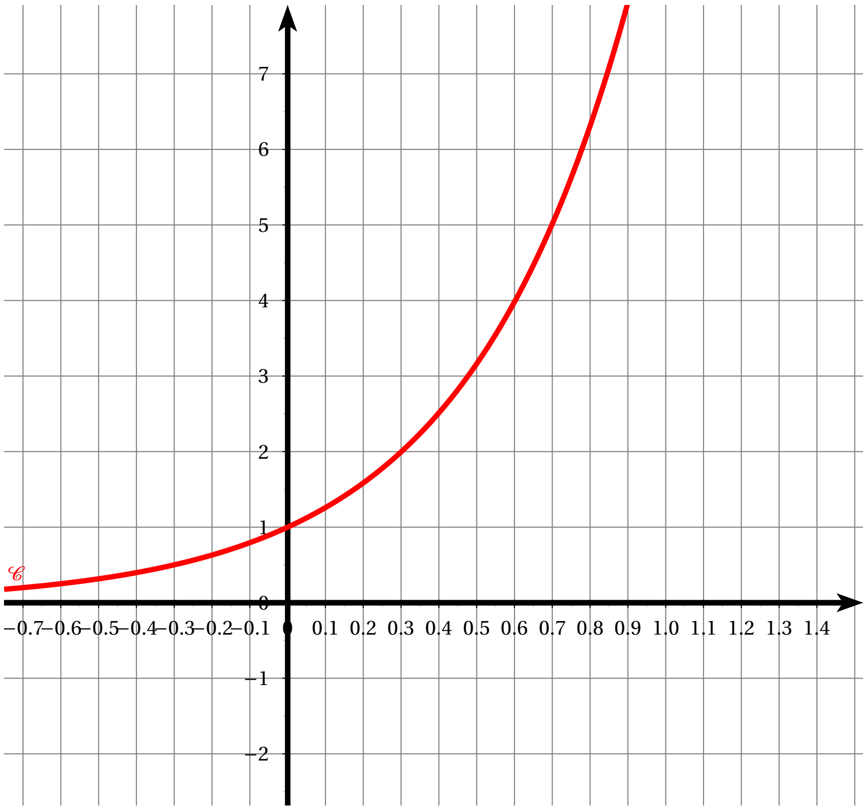
Logarithme décimal

I. Introduction et définition

Activité 1

Soit la fonction exponentielle f dont on donne la représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 10^x \end{array}$$



1. Justifier les variations de la fonction f.
2. Quel est le signe de f ?
3. k est un nombre réel. Suivant les valeurs de k, discuter le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$.
4. On choisit $k = 2$:
   (a) Résoudre graphiquement $10^x = 2$.
   (b) Sur votre calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} du nombre réel $\log(2)$; puis saisir $10^{\log(2)}$.
5. On choisit $k = 5$:
   (a) Résoudre graphiquement $10^x = 5$.
   (b) Sur votre calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} du nombre réel $\log(5)$; puis saisir $10^{\log(5)}$.
6. Résoudre l'équation $10^x = 10$.
7. Pour quelles valeurs de k, la solution de l'équation $10^x = k$, soit $\log(k)$, est négative ?

Définition

Soit k un nombre réel strictement positif.
L'unique solution de l'équation $10^x = k$ est le nombre réel $\log(k)$ appelé logarithme décimal de k.

Exemple

- L'unique solution de l'équation $10^x = 2$ est $\log(2)$;
- l'unique solution de l'équation $10^x = 5$ est $\log(5)$:
- l'unique solution de l'équation $10^x = 1$ est $\log(1) = 0$;
- l'unique solution de l'équation $10^x = 10$ est $\log(10) = 1$.

Remarque

L'équation $10^x = k$ pour k réel négatif ou nul n'admet aucune solution réelle.

Propriété

k est un nombre réel strictement positif.

- Si $0 < k < 1$ alors $\log(k) < 0$
- si $k = 1$ alors $\log(k) = 0$
- si $k > 1$ alors $\log(k) > 0$

Démonstration 1

admise

Définition

Pour tout réel k strictement positif, on peut définir la fonction logarithme décimal log telle que :

$$\begin{array}{rccl} \log : &]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log(x) \end{array}$$

et
$10^{\log(x)} = x$.

Propriété

Pour tout réel y, $\log(10^y) = y$

Démonstration 2

D'après la définition, $10^{\log(10^y)} = 10^y$ et $10^a = 10^b$ équivaut à $a = b$ donc $\log(10^y) = y$

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $3 \times 10^x = 9$
2. $7 - 2^x = 5$
3. $100^x = 20$
4. $10^x \times 10^3 = 60$

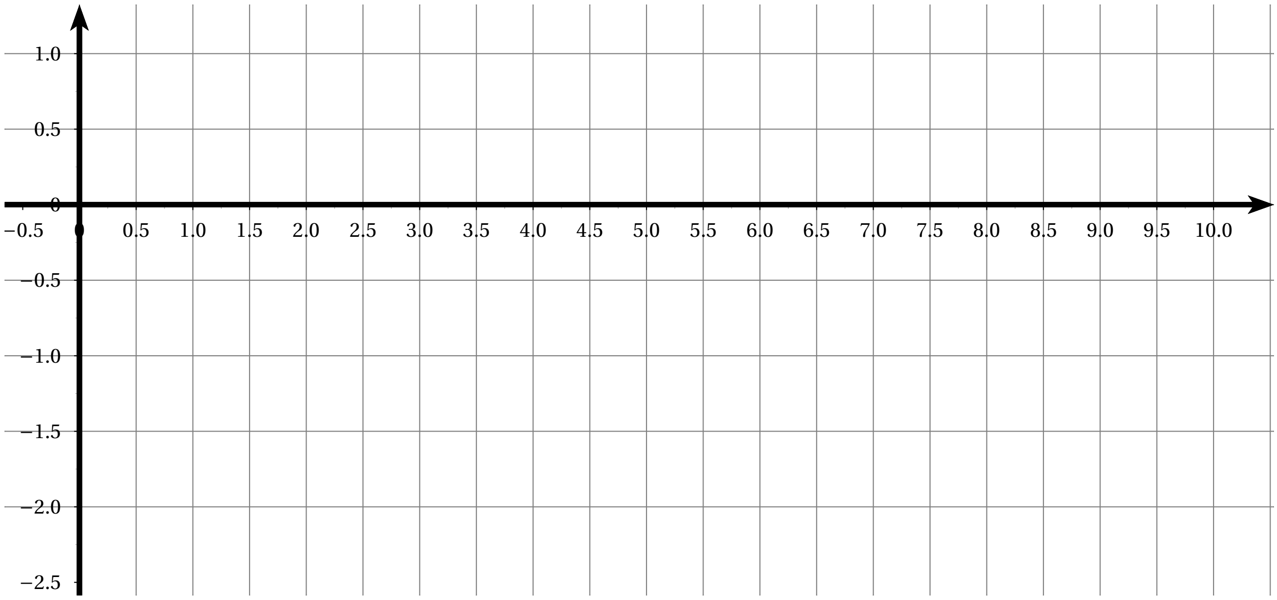
II. variation et représentation graphique

Activité 2

1. Compléter la table de valeurs suivante de la fonction log :

x	$0,1$	$0,2$	$0,5$	1	2	4	6	8	10
$\log(x)$									

2. Représenter la courbe de la fonction log dans le repère orthogonal suivant :



Propriété

La fonction log est strictement croissante sur $]0\,;\ +\infty[$

Démonstration 3

admise

Propriété

Soit a et b deux réels strictement positifs.

- $\log(a) = \log(b) \Longleftrightarrow a = b$
- $\log(a) < \log(b) \Longleftrightarrow a < b$

Démonstration 4

Cette propriété est une conséquence de la stricte croissance de la fonction log.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $10^x < 2$
2. $4 \times 10^x > 1$

III. Propriétés algébriques

Propriété

Soient a et b deux réels strictement positifs.

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

Démonstration 5

1. Que vaut $10^{\log(ab)}$?
2. Que vaut le nombre $10^{\log(a)+\log(b)}$?
3. En déduire la propriété.

Propriété

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier naturel.

- $\log(a^n) = n\log(a)$
- $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log(b)$
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Démonstration 6

1. $\log(a^n) = n\log(a)$:
   (a) Justifier l'égalité $\log(a^n) = n\log(a)$ pour $n = 0$ et $n = 1$.
   (b) Avec la propriété fondamentale, démontrer que $\log(a^2) = 2\log(a)$
   (c) Démontrer $\log(a^3) = 3\log(a)$
   Les autres cas pour n entier naturel supérieur à 3 sont admis.
2. $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log(b)$:
   (a) Exprimer $\log\left(b \times \dfrac{1}{b}\right)$ de deux manières.
   (b) En déduire la propriété.
3. En utilisant la propriété fondamentale et la propriété précédente, déduire $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$.

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes, x est un réel strictement positif :

1. $\log(x) + \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\log(100) + \log\left(10^3\right)$
3. $\log(3x) - \log\left(3^2\right)$
4. $\log\left(\dfrac{2}{x}\right) + \log\left(\dfrac{x}{8}\right)$

Exercice 4

Un capital augmente chaque année de 5%, le taux d'intérêt est composé, on considèrera une évolution continue dans le temps. Dans combien de temps le capital doublera-t-il ?

Exercice 5

La cote d'une voiture (son prix de vente d'occasion) baisse chaque année de 10%. Dans combien d'année la cote sera-t-elle inférieure à la moitié du prix d'achat ?