Fonctions exponentielles

Table des Matières

Fonctions exponentielles

I. Prolongement d'une suite géométrique

Activité 1

Soit une suite (u_n) géométrique de raison 1,5 et de premier terme $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3, placer les points associés sur le graphique en annexe.
2. Calculer la moyenne géométrique des termes u_0 et u_2, c'est à dire $\sqrt{u_0 \times u_2}$. Que remarquez-vous ?
3. Calculer la moyenne géométrique des termes u_1 et u_3, c'est à dire $\sqrt{u_1 \times u_3}$. Que remarquez-vous ?
4. (Pour aller plus loin), montrer que la moyenne géométrique des termes u_n et u_{n+2} soit $\sqrt{u_n \times u_{n+2}}$ est égale à u_{n+1} et vérifier que $n+1$ est la moyenne arithmétique des rangs n et $n+2$.
5. On souhaite prolonger sur $\mathbb{R}$ la suite (u_n), on procède alors par étapes dichotomique à partir de la propriété précédente :

Propriété

Pour deux nombres réels a et b, l'image de leur moyenne arithmétique $\dfrac{a+b}{2}$ est la moyenne géométrique des images $\sqrt{u(a) \times u(b)}$.

$$u\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{u(a) \times u(b)}$$

Compléter le tableau et le graphique en annexe de chacune des étapes :

(a) Étape 1 :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$u(x)$	1	$\sqrt{1 \times 1,5} \simeq 1,22$	1,5		2,25		3,375

(b) Étape 2 :

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$u(x)$	1				1,5

x	1	1,25	1,5	1,75	2
$u(x)$	1,5				2,25

x	2	2,25	2,5	2,75	3
$u(x)$	2,25				3,375

On peut continuer ainsi de suite pour définir la fonction sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Pour prolonger la fonction sur $\mathbb{R}_-$, pour x positif, on pose $1,5^{-x} = \dfrac{1}{1,5^x}$.

(Pour aller plus loin) La propriété reste valable :

Pour deux nombres réels a et b positifs on a :

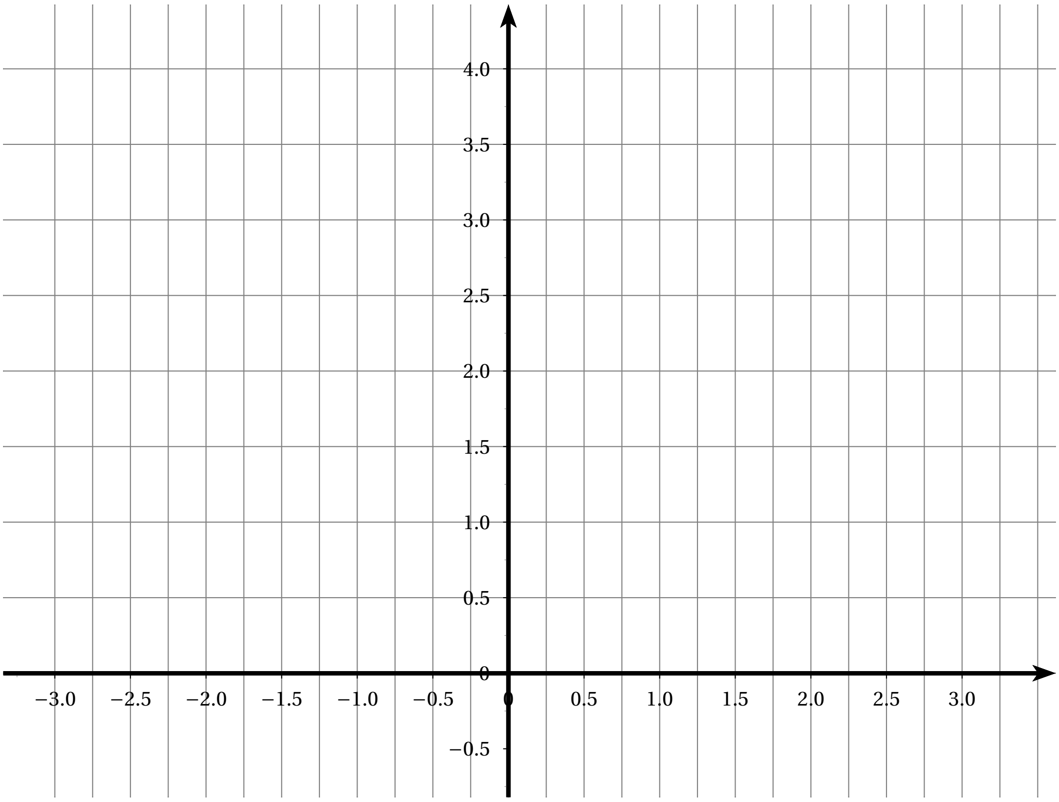
$$u\left(\frac{-a+(-b)}{2}\right) = 1,5^{\frac{-a+(-b)}{2}} = 1,5^{\frac{a+b}{2}} = \frac{1}{1,5^{\frac{a+b}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1,5^a \times 1,5^b}} = \sqrt{\frac{1}{1,5^a} \times \frac{1}{1,5^b}} = \sqrt{1,5^{-a} \times 1,5^{-b}} = \sqrt{u(-a) \times u(-b)}$$

Par exemples, $1,5^{-1} = \dfrac{1}{1,5} \simeq 0,67$ et $1,5^{-2} = \dfrac{1}{1,5^2} \simeq 0,44$.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$u(x)$	1				1,5				2,25				3,75

x	0	−0,25	−0,5	−0,75	−1	−1,25	−1,5	−1,75	−2	−2,25	−2,5	−2,75	−3
$u(x)$	1				0,67				0,44				

Annexe :



II. Fonctions exponentielles de base q

Définition

Soit q un nombre réel strictement positif ($q > 0$).
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a x associe q^x :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & q^x \end{array}$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle de base q.

Exemple

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a x associe $1,5^x$ est la fonction exponentielle de base $1,5$.

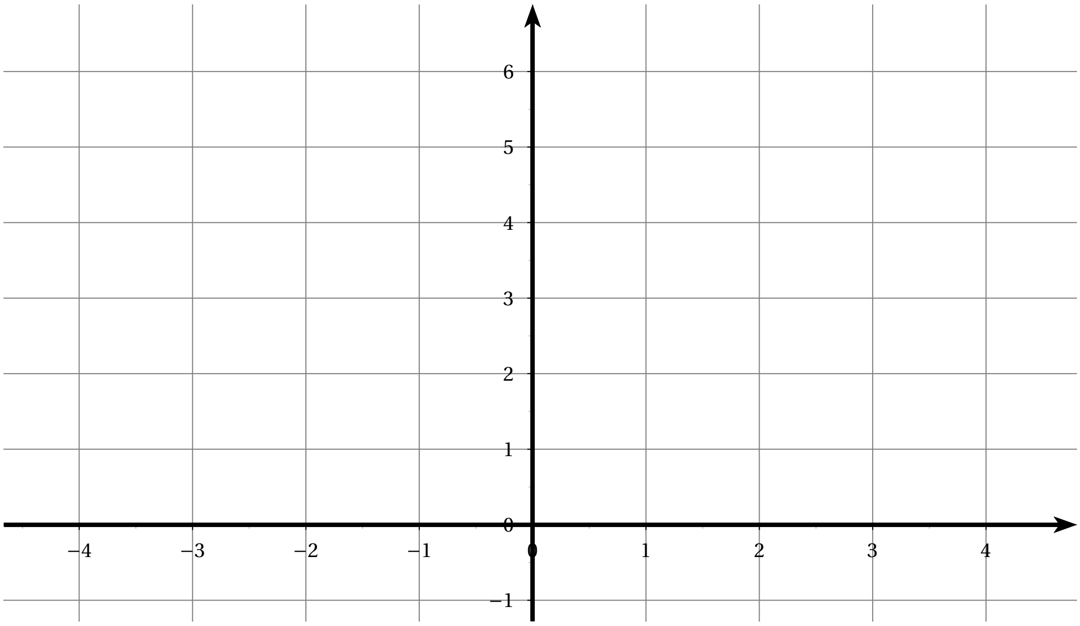
III. Représentation graphique des fonctions exponentielles

Activité 2

À l'aide d'une table de valeurs obtenues sur la calculatrice (indiquer les paramétrages de l'obtention de la table sur votre calculatrice), construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions exponentielles f et g suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1,6^x \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0,625^x \end{array}$



IV. Variations

Propriété

Soit la fonction exponentielle f de base q ($q > 0$), à x on associe q^x.

- Si $0 < q < 1$ alors f est décroissante,
- Si $q = 1$ alors f est constante,
- Si $q > 1$ alors f est croissante.

Démonstration 1

admise

Remarque

On retrouve les variations d'une suite géométrique pour n on associe q^n, n entier naturel

V. Propriétés algébriques

Propriété

Soit q un nombre réel strictement positif, x et y deux nombres réels et n un entier relatif.

- $q^{x+y} = q^x q^y$
- $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$
- $q^{nx} = \left(q^x\right)^n$

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $0,5^{-1,1} \times 0,5^{0,1}$
2. $(5^{3,2})^{-2} \times 25^{3,2}$
3. $(1,5^x)^2 \times 1,5^{0,5x}$
4. $\dfrac{2,1^{4,4x}}{(2,1^{1,1x})^4}$

VI. Application : fonctions du type kq^x

Propriété

Soit une fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = kq^x \end{array}$$

où k est un nombre réel non nul et q un réel strictement positif.

- Si $k > 0$ et $0 < q < 1$ alors f est décroissante,
- Si $k < 0$ et $0 < q < 1$ alors f est croissante,
- Si $k > 0$ et $q > 1$ alors f est croissante,
- Si $k < 0$ et $q > 1$ alors f est décroissante.

Démonstration 2

admise

animation

VII. Application : taux moyen de n évolutions successives

Activité 3

Cas de deux évolutions successives :

Durant un premier jour, une population de bactéries augmente de 10% puis durant le jour suivant, elle augmente de 20%.

1. Calculer le taux globale de l'évolution, c'est à dire le taux d'évolution du nombre de bactéries durant les deux jours.
2. Le taux moyen journalier des deux évolutions successives est le taux t à appliquer deux fois pour retrouver la même évolution globale que dans la question 1. Déterminer ce taux.

Activité 4

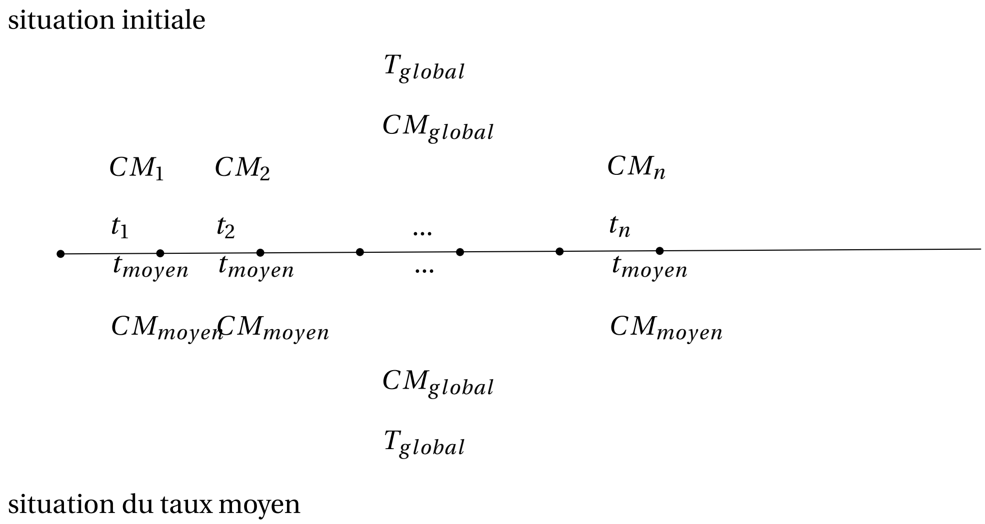
Cas de trois évolutions successives :

Durant un premier mois, un prix baisse de 5% puis durant le mois suivant, il augmente de 2%, puis durant le mois suivant, il augmente de 4%.

1. Calculer le taux globale de l'évolution, c'est à dire le taux d'évolution du prix durant les trois mois.
2. Le taux moyen mensuel des trois évolutions successives est le taux t à appliquer trois fois pour retrouver la même évolution globale que dans la question 1. Déterminer ce taux.

Définition

On appelle taux moyen de n évolutions successives de taux t_1, t_2, ... ,t_n et de taux global T_{global}, le taux t_{moyen} à appliquer successivement n fois pour obtenir la même évolution globale de taux T_{global}.
Schéma : CM représente le coefficient multiplicateur associé à chaque taux repéré.



Propriété

Soient n évolutions successives de taux t_1, t_2, ... ,t_n de coefficients multiplicateurs $CM_1 = 1 + t_1$, $CM_2 = 1 + t_2$, ... , $CM_n = 1 + t_n$.
Le coefficient multiplicateur moyen CM_{moyen} associé au taux moyen t_{moyen} est la moyenne géométrique des n coefficients multiplicateurs. Ainsi on a (on note CM_{global} le coefficient multiplicateur global des n évolutions successives) :

$$CM_{moyen} = (CM_1 \times CM_2 \times ... \times CM_n)^{\frac{1}{n}} = \left(CM_{global}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

$$t_{moyen} = CM_{moyen} - 1 \quad (2)$$

On a directement le taux moyen par :

$$t_{moyen} = (CM_1 \times CM_2 \times ... \times CM_n)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (3)$$

Exercice 2

On note CM le coefficient multiplicateur global et CM_g le coefficient multiplicateur moyen (moyenne géométrique des n coefficients multiplicateurs).

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Taux successifs t_i	5%	-20%	-10%	30%	CM_{global}	CM_{moyen}
Coefficients multiplicateurs CM_i						

2. En déduire le taux moyen t.

Exercice 3

En trois ans le prix d'un article est passé de 8 euros à 12 euros.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global de l'évolution.
2. En déduire le taux moyen annuel de l'évolution, puis le taux moyen mensuel de l'évolution.