# Fonction inverse

## Table des Matières

# Fonction inverse

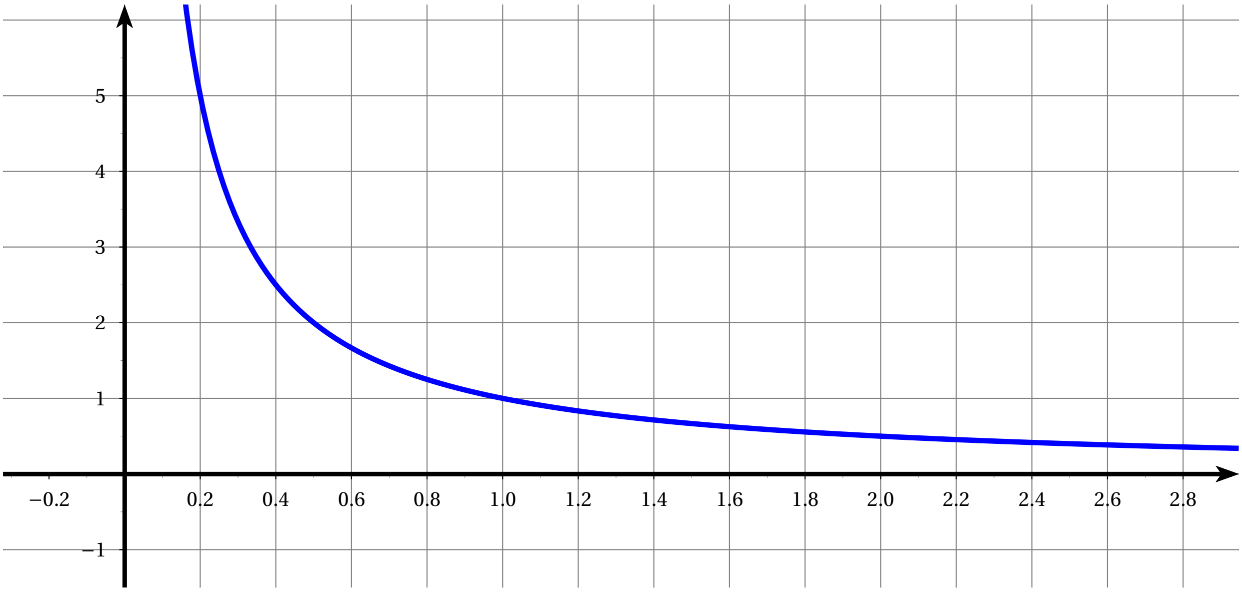
## I. Définition et allure de la courbe

**Activité 1**

Un mobile fait 1 m en $x$ heures.
On modélise la vitesse uniforme $V$, exprimée en m.h$^{-1}$ est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$V : \begin{array}{rcl} ]0\,;\,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

$x$ désigne le temps, il est exprimé en heures.
On note $\mathscr{C}_V$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ suivant :



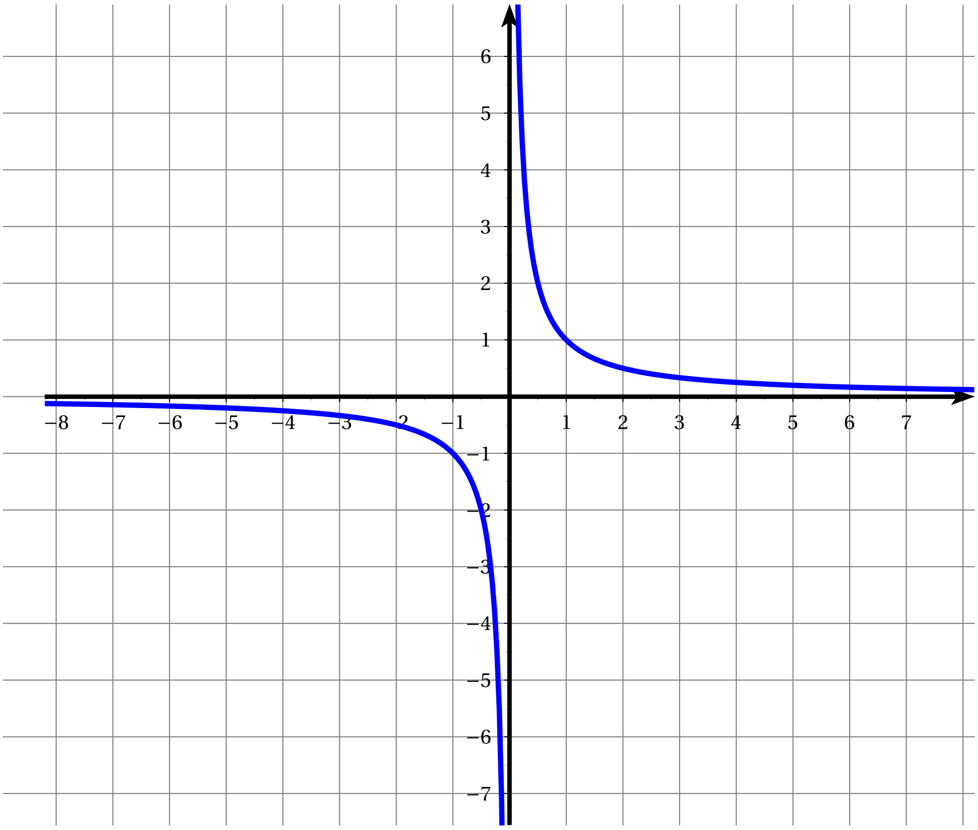

1. À quelle vitesse se déplace un mobile pour lequel $x = 0,2$ ? $x = 1$ ? $x = 2$ ?
2. Compléter les phrases suivantes :
   - Pour parcourir 1 m, si le temps $x$ est proche de 0 alors la vitesse est .....
   - Pour parcourir 1 m, si le temps $x$ est très grand alors la vitesse est ......

**✒ Définition**

La fonction inverse est définie par

$$f: \begin{array}{rcl} ]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, la courbe représentative de la fonction inverse est appelée hyperbole, elle a pour équation $y = \dfrac{1}{x}$




**✒ Propriété**

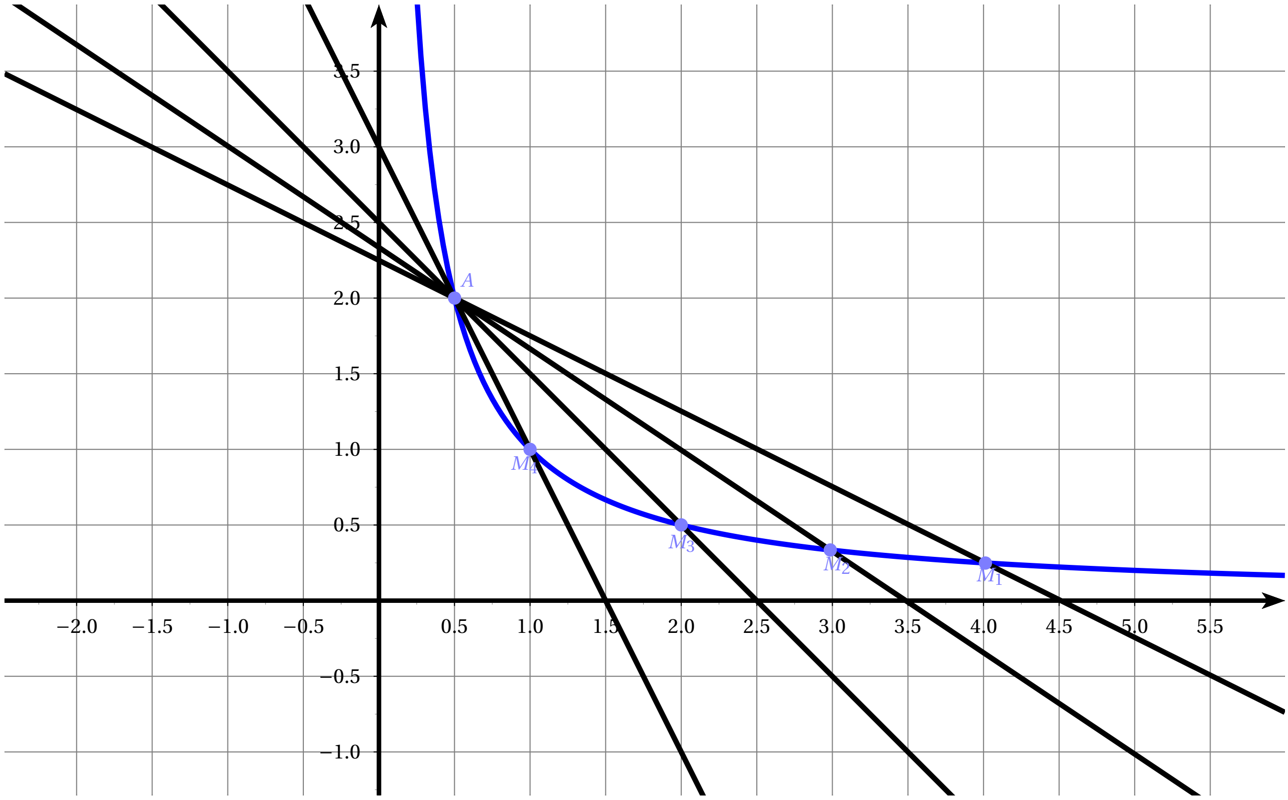
Soit la fonction inverse $f$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tous réels $x$ non nuls, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

- Lorsque $x$ est proche de 0, on dit $x$ tend vers 0 alors $\dfrac{1}{x}$ est proche de l'infini, suivant le signe de $x$, $-\infty$ ou $+\infty$.
  L'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- Lorsque $x$ est très grand et positif, on dit $x$ tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{1}{x}$ est proche de 0.
  Lorsque $x$ est très grand et négatif, on dit $x$ tend vers $-\infty$ alors $\dfrac{1}{x}$ est proche de 0.
  L'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

## II. Dérivée

☞**Activité 2**

Soit la fonction inverse $f$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pour $x$ réel non nul.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthogonal.




$A$ est le point de l'hyperbole d'abscisse $0,5$. $M$ est un point mobile sur l'hyperbole, ce point se rapproche du point $A$, on note $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ des positions du point $M$ se rapprochant du point $A$.
Pour exemple, la pente $p_1$ de la droite $(AM_1)$ est donnée par

$$\frac{y_{M_1}-y_A}{x_{M_1}-x_A}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{0,5}}{4-0,5}=\frac{0,25-2}{3,5}=\frac{-1,75}{3,5}=\frac{-1}{2}$$

1. De la même manière que l'exemple, calculer les pentes $p_2$, $p_3$ et $p_4$ est droites $(AM_2)$, $(AM_3)$, $(AM_4)$.
2. Vers quel nombre semble tendre la pente de la droite $(AM)$ lorsque $M$ se rapproche de $A$ ?
3. On donne le coefficient directeur de la tangente à l'hyperbole au point d'abscisse $0,5$, soit $f'(0,5)=-4$. Tracer la tangente à l'hyperbole en 0,5.

✒ **Propriété**

Soit la fonction inverse $f$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pour $x$ réel non nul.
La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

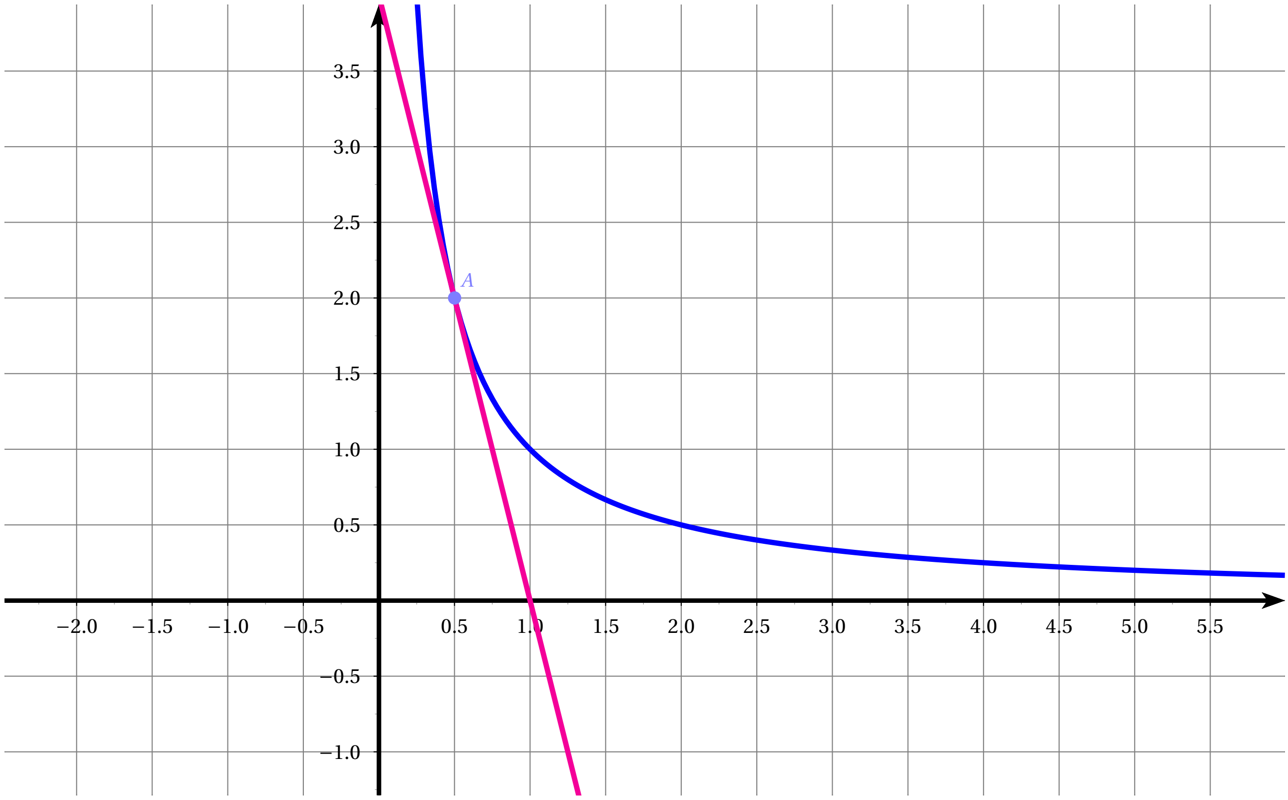
☞**Démonstration 1**

admise

☞**Exercice 1**

Soit la fonction inverse $f$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x$ réel non nul.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthogonal.




1. Calculer la pente de la tangente à l'hyperbole au point d'abscisse 1. Tracer la tangente à l'hyperbole au point d'abscisse 1.
2. Calculer la pente de la tangente à l'hyperbole au point d'abscisse 2. Tracer la tangente à l'hyperbole au point d'abscisse 2.
3. Calculer la pente de la tangente à l'hyperbole au point d'abscisse 4. Tracer la tangente à l'hyperbole au point d'abscisse 4.

☞**Exercice 2**

Calculer les dérivées $f'$ des fonctions suivantes définies sur $]0\,;\,10]$ :

1. $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 5x - 6 - \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{5}{x}$
4. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 8 + \dfrac{9}{x}$

## III. Sens de variations

**Propriété**

Soit la fonction inverse $f$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x$ réel non nul.
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur $]0\,;\,+_infty[$. Le tableau de variations de la fonction inverse est

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | |

**Démonstration 2**

laissée en exercice

## IV. Application coût moyen (coût/prix unitaire)

☞**Exercice 3**

Une entreprise fabrique du jus de pommes. Le coût total de fabrication journalier du jus de pommes, exprimé en euros, est modélisé par la fonction $C$ :

$$\begin{array}{rccl} C: & [0\,;\,10] & \to & \mathbb{R} \\ & q & \mapsto & C(q) = 0,5q^3 - 5q^2 + 40q + 98 \end{array}$$

$q$ est la quantité produite, elle est exprimée en hectolitres.

1. Calculer le coût total de fabrication journalier pour 2 hL produit. En déduire le coût unitaire (coût moyen) pour $2hL$ produit.
2. Montrer que le coût moyen, $CM$ a pour expression $CM(q) = 0,5q^2 - 5q + 40 + \dfrac{98}{q}$ pour $q$ dans l'intervalle $]0\,;\,10]$.
3. Étude des variations de la fonction $CM$.
   (a) Montrer que $CM'(q) = \dfrac{q^3 - 5q^2 - 98}{q^2}$ pour $q$ réel de $]0\,;\,10]$.
   (b) Montrer que $q^3 - 5q^2 - 98 = (q-7)[(q-1)^2 + 13]$.
   (c) En déduire le signe de $C'(q)$ puis le tableau de variations du coût moyen $CM$.
   Quel est le coût moyen minimal ?
4. À partir de la lecture graphique, que peut-on dire du coût moyen lorsque la quantité produite est proche de 0 ? Interpréter graphiquement.
5. (pour aller plus loin) Le coût marginal de production est le coût engendré par la production d'une unité supplémentaire soit $C(q+1) - C(q)$ qui est égal à $\dfrac{C(q+1) - C(q)}{(q+1) - q}$.
   On approche le coût marginal par la fonction dérivée du coût soit $C'(q)$, on a $C'(q) \simeq C(q+1) - C(q)$.
   (a) Calculer $C'(q)$.
   (b) Montrer que pour le coût moyen minimal, le coût marginal et le coût moyen sont égaux.