Variations fonction degré trois, dérivation

S.Mirbel

Exemple - Plan de l'étude

Plan d'étude d'une fonction :

- calcul de $f'(x)$
- étude du signe de $f'(x)$
- déduction des variations de f
- vérification par lecture graphique

Présentation d'un exemple :
Soit la fonction f définie sur $[0 \ ; \ 4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

calcul de l'expression de la fonction dérivée

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 9 = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

détermination du signe de $f'(x)$

sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.
et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$:

- 3 étant positif $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 4x + 3$,
  cette expression est celle d'une fonction polynôme du second degré, le signe du discriminant permet de trouver son signe :
- signe de $1x^2 - 4x + 3$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$.
  $\Delta > 0$ l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet deux solutions
  $x_1 = \dfrac{4-2}{2\times 1} = 1$ $x_2 = \dfrac{4+2}{2\times 1} = 3$, et le signe de $1x^2 - 4x + 3$ est celui du signe de 1 à l'extérieur des racines x_1 et x_2 soit strictement positif.

détermination du signe de $f'(x)$

x	0		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

détermination des variations de la fonction f

x	0		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$f(0) = -1$	$\nearrow$	$f(1) = 3$	$\searrow$	$f(3) = -1$	$\nearrow$	$f(4) = 3$

Calculs des images du tableau :

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

$f(0) = 0^3 - 6 \times 0^2 + 9 \times 0 - 1 = -1$

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 - 1 = 3$; $f(3) = -1$; $f(4) = 3$

Vérifications graphiques - résumé

x	0		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$f(0)=-1$	$\nearrow$	$f(1)=3$	$\searrow$	$f(3)=-1$	$\nearrow$	$f(4)=3$