

Variations fonction degré trois, dérivation

S.Mirbel

Exemple - Plan de l'étude

Plan d'étude d'une fonction :

- calcul de $f'(x)$
- étude du signe de $f'(x)$
- déduction des variations de f
- vérification par lecture graphique

Présentation d'un exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 9 = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

détermination du signe de $f'(x)$

sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

Sur l'intervalle $[0 ; 4]$:

- 3 étant positif $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 4x + 3$,
cette expression est celle d'une fonction polynôme du second degré, le signe du discriminant permet de trouver son signe :
- signe de $1x^2 - 4x + 3$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$.
 $\Delta > 0$ l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet deux solutions
 $x_1 = \frac{4-2}{2 \times 1} = 1$ $x_2 = \frac{4+2}{2 \times 1} = 3$, et le signe de $1x^2 - 4x + 3$
est celui du signe de 1 à l'extérieur des racines x_1 et x_2 soit
strictement positif.

détermination du signe de $f'(x)$

x	0	1	3	4		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

détermination des variations de la fonction f

x	0	1	3	4		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	$f(0) = -1$	$f(1) = 3$	$f(3) = -1$	$f(4) = 3$		

Diagram illustrating the variation of the function f over the interval $[0, 4]$. The table shows the sign of the derivative $f'(x)$ and the corresponding values of the function $f(x)$ at the critical points and endpoints. Arrows indicate the direction of the function's path: increasing from $f(0) = -1$ to $f(1) = 3$, decreasing from $f(1) = 3$ to $f(3) = -1$, and increasing from $f(3) = -1$ to $f(4) = 3$.

Calculs des images du tableau :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f(0) = 0^3 - 6 \times 0^2 + 9 \times 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 - 1 = 3 ; f(3) = -1 ; f(4) = 3$$

Vérifications graphiques - résumé

x	0	1	3	4		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	$f(0) = -1$	$f(1) = 3$	$f(3) = -1$	$f(4) = 3$		

