Variations fonction quotient, dérivation

S.Mirbel

Exemple - Plan de l'étude

Plan d'étude d'une fonction :

- calcul de $f'(x)$
- étude du signe de $f'(x)$
- déduction des variations de f
- vérification par lecture graphique

Présentation d'un exemple :
Soit la fonction f définie sur $[1\ ;\ 5]$ par
$f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x} = x+1+\dfrac{4}{x}$.

Soit la fonction f définie sur $[1\ ;\ 5]$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x}$,

$f(x) = x + 1 + 4 \times \dfrac{1}{x}$;

$u(x) = x + 1$; $u'(x) = 1$; $v(x) = \dfrac{1}{x}$; $v'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + 4 \times \frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

sur $[1\ ;\ 5]$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x}$.

et $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$

Sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$:

- $x - 2 > 0 \iff x > 2$,
- $x + 2 > 0 \iff x > -2$ ainsi $x + 2 > 0$ pour tout x de $[1\ ;\ 5]$.
- $x^2 > 0$.
- $f'(x)$ est du signe de $x - 2$.

Détermination du signe de $f'(x)$

Sur $[1\ ;\ 5]$; $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$

x	1		2		5
$x+2$		$+$	4	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	4	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Détermination des variations de la fonction f

x	1		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$f(1) = 6$	$\searrow$	$f(2) = 5$	$\nearrow$	$f(5) = 6.8$

Calculs des images du tableau :

$f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x}$

$f(1) = 1 + 1 + \dfrac{4}{1} = 6$

$f(2) = 2 + 1 + \dfrac{4}{2} = 5$; $f(5) = 5 + 1 + \dfrac{4}{5} = 6,8$

Vérifications graphiques - résumé

x	1		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$f(1)=6$	$\searrow$	$f(2)=5$	$\nearrow$	$f(5)=6.8$