

Taux moyen

1 Équation $x^n = a$

Activité :

Soit x un nombre positif.

1. Résoudre l'équation $x^2 = 16$.
2. Résoudre l'équation $x^2 = 11$.
3. Résoudre l'équation $x^3 = 8$.
4. Résoudre l'équation $x^5 = 100$.

Définition :

Soit x nombre strictement positif et a un nombre strictement positif donné.

L'équation $x^n = a$ admet une unique solution notée $a^{\frac{1}{n}}$.

2 Moyenne géométrique

Activité :

1. Calculer la longueur d'un carré qui aurait la même aire qu'un rectangle de côté 2 cm et 8 cm.
2. Calculer la longueur de l'arrête d'un cube qui aurait le même volume qu'un parallélépipède rectangle de côté 4 cm, 2 cm et 8 cm.

Définition :

Soit n nombres positifs x_1, x_2, \dots, x_n . La moyenne géométrique notée $x_{geomoyen}$ de ces n nombres est :

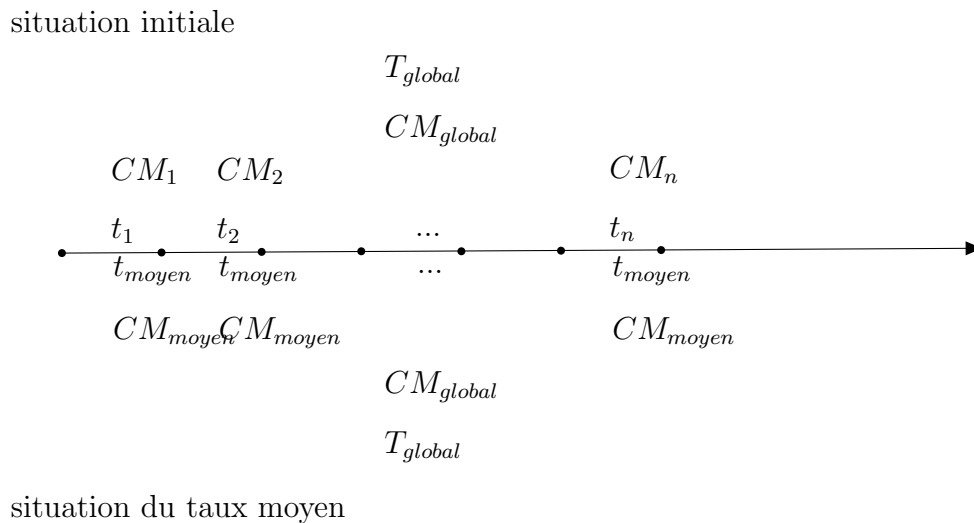
$$x_{geomoyen} = (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

3 Application au taux moyen

Définition :

On appelle taux moyen de n évolutions successives de taux t_1, t_2, \dots, t_n et de taux global T_{global} , le taux t_{moyen} à appliquer successivement n fois pour obtenir la même évolution globale de taux T_{global} .

Schéma : CM représente le coefficient multiplicateur associé à chaque taux repéré.



Activité :

Le prix d'un article diminue successivement de 10% puis de 50% puis de 20%. Déterminer le taux moyen de ces trois évolutions (faire un schéma).

Théorème :

Soient n évolutions successives de taux t_1, t_2, \dots, t_n de coefficients multiplicateurs

$$CM_1 = 1 + t_1, CM_2 = 1 + t_2, \dots, CM_n = 1 + t_n.$$

Le coefficient multiplicateur moyen CM_{moyen} associé au taux moyen t_{moyen} est la moyenne géométrique des n coefficients multiplicateurs. Ainsi on a (on note CM_{global} le coefficient multiplicateur global des n évolutions successives) :

$$CM_{moyen} = (CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n)^{\frac{1}{n}} = (CM_{global})^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

$$t_{moyen} = CM_{moyen} - 1 \tag{2}$$

On a directement le taux moyen par :

$$t_{moyen} = (CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{3}$$

L'organisation d'un tableau et/ou d'un schéma peut aider à mieux cerner les étapes du calcul du taux d'évolution moyen.

Exercice 1 :

On note CM le coefficient multiplicateur global et CM_g le coefficient multiplicateur moyen (moyenne géométrique des n coefficients multiplicateurs).

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Taux successifs t_i	5%	-20%	-10%	30%	CM_{global}	CM_{moyen}
Coefficients multiplicateurs CM_i						

2. En déduire le taux moyen t .

Exercice 2 :

En trois ans le prix d'un article est passé de 8 euros à 12 euros.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global de l'évolution.
2. En déduire le taux moyen annuel de l'évolution.
3. Déduire de la première question le taux moyen mensuel de l'évolution.