Exemples de deux suites : arithmétiques et géométriques

1 suite arithmétique

1.1 Les deux expressions d'une suite arithmétique

Définition :
Une suite u est dite arithmétique si elle est définie par un premier terme (souvent au rang 0 par u_0) et une relation appelée relation de récurrence de u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = u_n + R.$$

R est appelé raison de la suite u.

Exercice : On définit la suite u par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation de $u_{n+1} = u_n + 6$.

1. Calculer u_{10}.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Théorème :
Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison R.
Pour tout nombre n, on a l'expression de u_n en fonction de n :

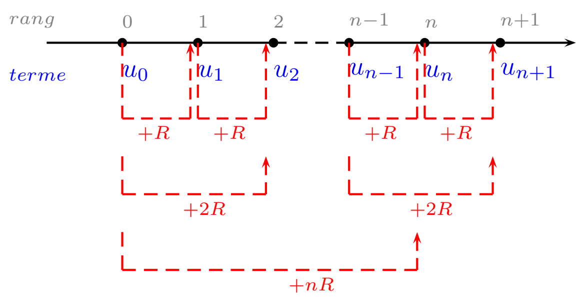
$$u_n = u_0 + nR$$

Réciproquement, si pour tout entier n, une suite u a pour expression $u_n = a + bn$, alors la suite u est arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $R = b$.
La relation $u_n = u_0 + nR$ est appelée relation fonctionnelle de la suite u. *Remarque :*

Par ce théorème, on a aussi les relations fonctionnelles suivantes :

$$u_n = u_1 + (n-1)R \text{ (pour } n \geqslant 1)$$
$$u_n = u_2 + (n-2)R \text{ (pour } n \geqslant 2)$$
$$\dots$$

Schéma :



Exercice :
Soit une suite u arithmétique telle que $u_5 = 240$ et de raison -2.

1. Déterminer u_0.
2. Calculer $S = \sum_{i=0}^{5} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.

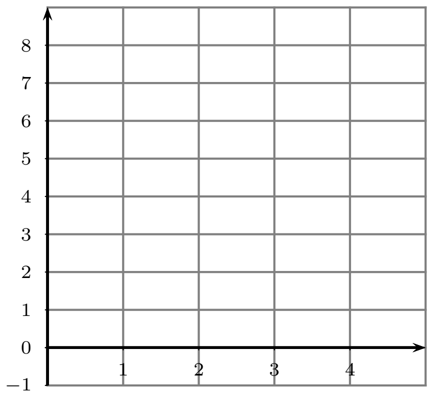
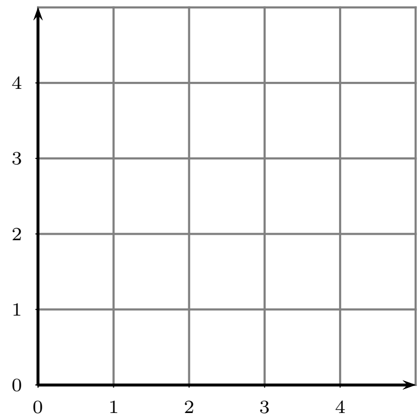
1.2 Exemple de représentation graphique

Exercice - exemple :
Soit les suites u est v définies par :

u	v
$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 0,5 \\ v_0 = 4 \end{cases}$

Pour chacune des suites répondre aux questions suivantes en complétant le tableau ci-dessous :

1. Donner les relations fonctionnelles des deux suites, soit les expressions de u_n et v_n en fonction de n (voir schéma et définition).
2. Compléter la représentation graphique des points des deux suites.
3. Conjecturer les variations et la limite de chacune des suites.
4. Dans les deux cas, les points de la suite sont alignés sur une droite, dans chacun des cas donner l'équation de la droite

<table>
<tr><td>relation fonctionnelle</td><td>$u_n =$</td><td>$v_n =$</td></tr>
<tr><td>exemples</td><td>$r > 0$
$r = 2$</td><td>$r < 0$
$r = -0,5$</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>variations</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>équation de droite</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1.3 variations

Théorème :
Soit u une suite arithmétique de raison r.

- si $r < 0$ la suite u est décroissante
- si $r = 0$ la suite u est constante
- si $r > 0$ la suite u est croissante

Exercice :
Soit une suite u arithmétique telle que $u_1 = 240$ et de raison -2. Déterminer le rang n à partir duquel $u_n < 0$.

2 suite géométrique

2.1 Les deux expressions d'une suite géométrique

Définition :
Une suite u est dite géométrique si elle est définie par un premier terme (souvent au rang 0 par u_0) et une relation appelée relation de récurrence de u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = Qu_n.$$

Q est appelé raison de la suite u.

Exercice : On définit la suite u par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation de $u_{n+1} = 6u_n$.

1. Calculer u_4.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Théorème :
Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison Q.
Pour tout nombre n, on a l'expression de u_n en fonction de n :

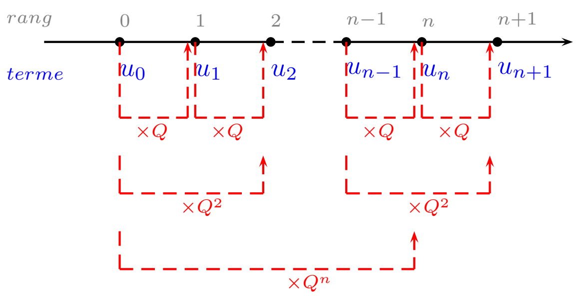
$$u_n = u_0 \times Q^n$$

Réciproquement, si pour tout entier n, une suite u a pour expression $u_n = a \times b^n$, alors la suite u est géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $Q = b$.
La relation $u_n = u_0 \times Q^n$ est appelée relation fonctionnelle de la suite u.

Remarque :
Par ce théorème, on a aussi les relations fonctionnelles suivantes :

$$u_n = u_1 \times Q^{n-1} \text{ (pour } n \geqslant 1)$$
$$u_n = u_2 \times Q^{n-2} \text{ (pour } n \geqslant 2)$$
$$\dots$$

Schéma :



Exercice :
Soit une suite u géométrique de terme $u_2 = 24$ et de raison $\frac{1}{2}$. Déterminer $\sum_{i=0}^{3} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.

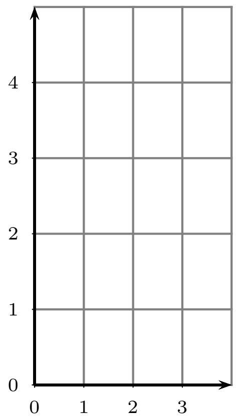
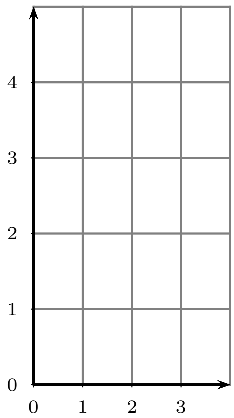
2.2 Exemple de représentation graphique

Exercice - exemple :
Soit les suites u et v définies par :

u	v
$\begin{cases} u_{n+1} = 1,5u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = 0,5v_n \\ v_0 = 4 \end{cases}$

Pour chacune des suites répondre aux questions suivantes en complétant le tableau ci-dessous :

1. Donner les relations fonctionnelles des quatre suites, soit les expressions de u_n, v_n en fonction de n (voir schéma et définition).
2. Compléter la représentation graphique des points des quatre suites.
3. Conjecturer les variations et la limite de chacune des suites.

relation fonctionnelle	$u_n =$	$v_n =$
exemples	$q > 1$ $q = 1,5$	$0 < q < 1$ $q = 0,5$
		
variations		

2.3 variations

Théorème :
Soit u une suite géométrique de raison Q, $Q > 0$ et de premier terme u_0 tel que $u_0 > 0$.

- si $0 < q < 1$ la suite u est décroissante
- si $q = 1$ la suite u est constante
- si $q > 1$ la suite u est croissante

Exercice :
Soit une suite u géométrique de premier terme $u_2 = 24$ et de raison $\frac{1}{2}$. À partir de la calculatrice (table) déterminer à partir de quel rang n, $u_n < 0,25$.