Dérivation des fonctions

1 Dérivée des fonctions de référence

Théorème :
Les fonctions f suivantes sont dérivables sur l'intervalle I, on note f' leur fonction dérivée :

Intervalle I	Fonction f	Fonction dérivées f'
$]-\infty;+\infty[$	$mx+p$	m
$]-\infty;+\infty[$	ax^2+bx+c	$2ax+b$
$]-\infty;+\infty[$	ax^3+bx^2+cx+d	$3ax^2+2bx+c$
$]-\infty;+\infty[$	x^n	nx^{n-1}
$]-\infty;+\infty[\cup]-\infty;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$

Exercice :
Pour les fonctions f suivantes donner $f'(x)$:

1. $f(x) = 3x - 1$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = -5 - x$
4. $f(x) = 3x^2 + x - 5$
5. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 1$
6. $f(x) = x^2 + 7$
7. $f(x) = x^5$
8. $f(x) = x^3 - x^2$
9. $f(x) = (x + 5)(x - 2)$
10. $f(x) = x(x - 1)(x + 1)$

2 Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème :
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre non nul.
Le tableau suivant donne les opérations pour une fonction f et le résultat de l'opération pour une fonction f' :

f	f'
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
uv	$u'v+uv'$

Remarque :
La dernière opération n'est pas au programme.

Exercice :
Identifier les fonctions u, v et le nombre k, puis donner $f'(x)$:

1. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1; 10]$
2. $f(x) = 3x^2 - 7x + 1 + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1; 10]$
3. $f(x) = 8x^4$ sur l'intervalle $[0; 2]$
4. $f(x) = \frac{3}{x}$ sur l'intervalle $[1; 4]$
5. $f(x) = \frac{3x+1}{7x-2}$ sur l'intervalle $[1; 5]$
6. $f(x) = x^3 - x - \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1; 5]$
7. $f(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - \frac{2}{x}$ sur l'intervalle $[1; 4]$
8. $f(x) = 5 + \frac{4x}{2x-1}$ sur l'intervalle $[1; 4]$

3 Application aux variations d'une fonction

Théorème : (première)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I (par exemple une fonction polynôme du second degré), le signe de $f'(x)$, fonction dérivée de la fonction f permet de déterminer les variations de la fonction f :

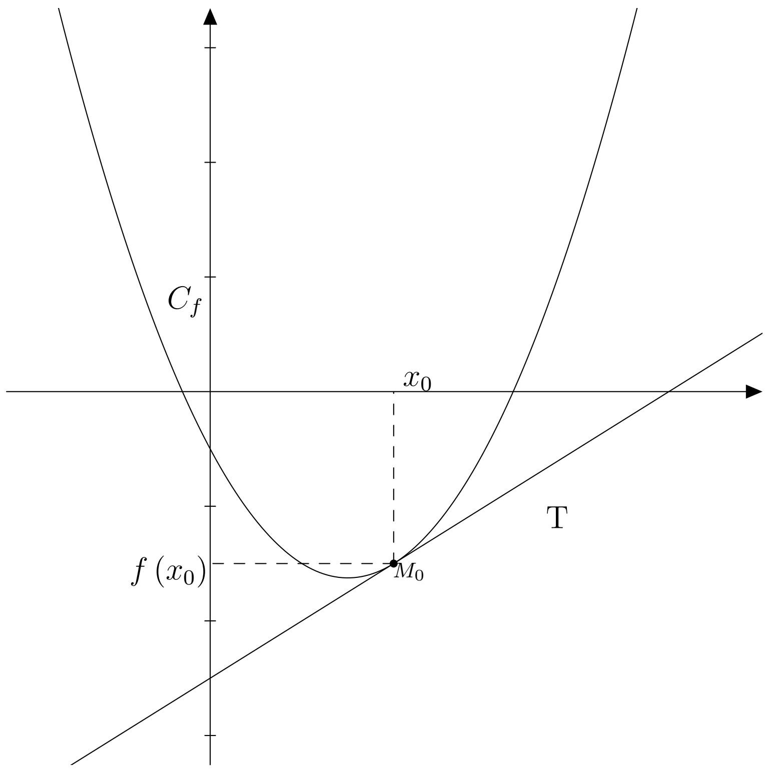
Pour tout nombre x de I, si $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante, Pour tout nombre x de I, si $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante, Pour tout nombre x de I, si $f'(x) = 0$ alors f est constante.

Exercice :
Étudier les variations des fonctions suivantes, pour tous les nombres réels x de l'intervalle I (vous vérifierez tous vos résultats à partir du graphique de votre calculatrice) :

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ sur l'intervalle $[0; 2]$
2. $f(x) = x^3 - 2,5x^2 + 2x + 3$ sur l'intervalle $[-10; 10]$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{4x+5}$ sur l'intervalle $[1; 5]$
4. $f(x) = 4x + 1 - \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1; 8]$

4 Tangente à une courbe

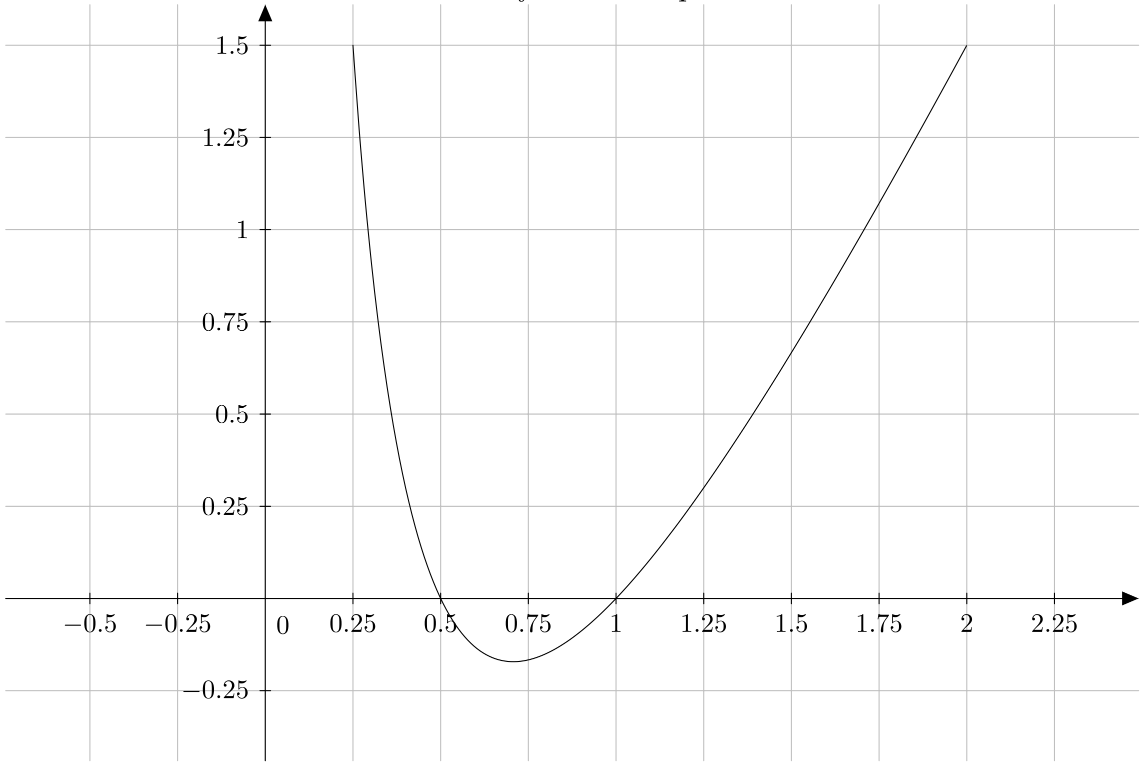
Définition :
On appelle tangente à une courbe en x_0, la droite passant par le point M_0 de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$.



Théorème : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et x_0 un nombre de l'intervalle I.
L'équation de la tangente en x_0 est donnée par l'équation :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Exercice :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0.25; 2]$, par $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}$.
On donne la courbe C de la fonction f dans le repère suivant :



1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1. La tracer.
3. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0.5. La tracer.
4. (bonus) Déterminer par le calcul, le signe de $f'(x)$.