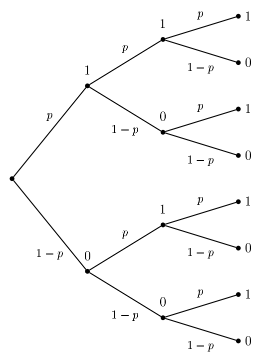
Loi Binomiale et Loi Normale

1 Introduction de la loi Normale

1.1 Rappel sur la loi Binomiale

On rappelle qu'une variable X suit une loi Binomiale de paramètres $(n; p)$ si X compte le nombre de "succès" dans une situation de n expériences indépendantes et identiques à deux issues "succès" (noté 1) et "échec" (noté 0), avec la probabilité d'un succès sur chaque expérience égale à p.
Exemple avec une représentation pour $n = 3$.



En suivant les chemins, X et les probabilités associées $P(X = k)$ prennent les valeurs dans ce tableau à compléter : On posera $q = 1 - p$.

$X = k$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$P(X = k)$	q^3	$3pq^2$		

Pour un grand nombre d'expériences, on utilisera la calculatrice graphique pour trouver les probabilités $P(x = k)$ ou $P(X \leqslant k)$.

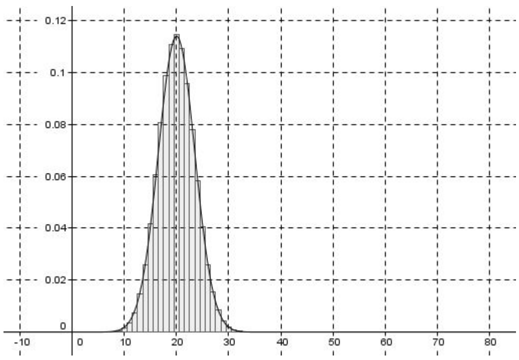
Théorème :
Soit X qui suit une loi Binomiale de paramètres $(n; p)$.
– L'espérance (moyenne) $E(X)$ est $E(X) = np$.
– L'écart-type, $\sigma(X)$ est $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

1.2 Approximation de la loi Binomiale

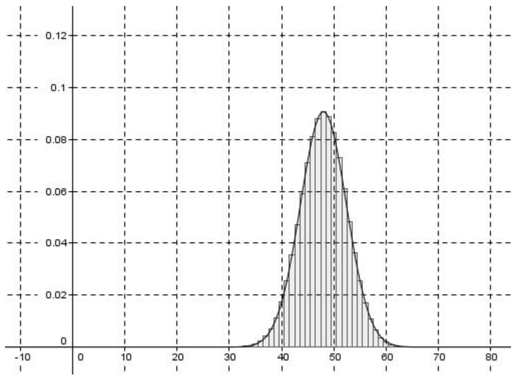
1.2.1 Activité

– ouvrir le document géogébra "convergence loi binomiale loi normale".
– constater que vous pouvez faire varier les paramètres $(n; p)$ de la loi binomiale, les caractéristique de la loi Binomiale apparaissent en rose, notamment dans la partie tableur.
– régler les paramètres de telle manière que X suive une loi binomiale de paramètres $(50; 0,4)$.
– Tout ce qui se réfère à la loi Normale est en bleu.

1. Dans la partie tableur, quelle formule a été saisie en cellule B3 ?
2. Lire la probabilité $P(X = 20)$. Retrouver les résultats avec votre calculatrice.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ associés à la variable X.
4. Cocher la loi Normale de paramètres $(m'; s')$. Deux curseurs m' et s' apparaissent. Modifier les valeur m' et s' de manière à obtenir une approximation de la loi Binomiale de paramètres $(n; p)$ par cette nouvelle courbe de la loi Normale de paramètres (m', s'), vous devez obtenir la configuration suivante :



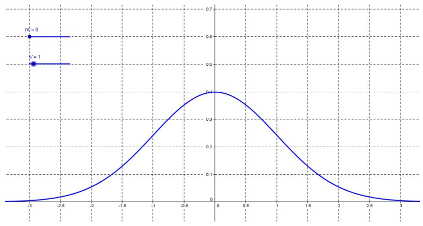
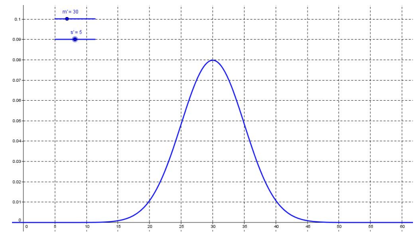
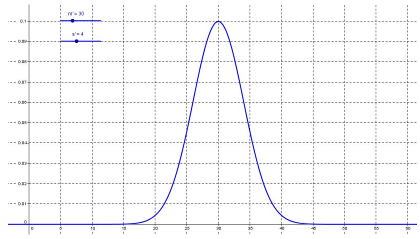
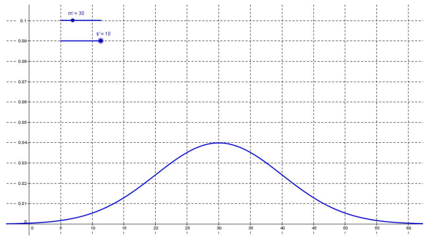
5. Donner alors les valeurs de m' et s'. Que constatez-vous ?
6. Retrouver les paramètres $(m'; s')$ de la loi Normale pour approcher une loi Binomiale de paramètres $(80; 0,6)$.



1.2.2 Loi Normale

Approche d'une définition :
Une courbe en forme de "cloche", admettant un axe de symétrie d'équation $x = m$, avec de moins en moins de valeurs lorsqu'on s'éloigne de l'axe de symétrie, est représentative d'une loi dite Normale de paramètres $(m; \sigma)$ ou m représente la moyenne et σ l'écart-type associés à une variable X.

Exemples de représentations graphiques :

paramètres de la loi Normale	Représentation graphique
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$	
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(30; 5)$	
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(30; 2)$	
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(30; 10)$	

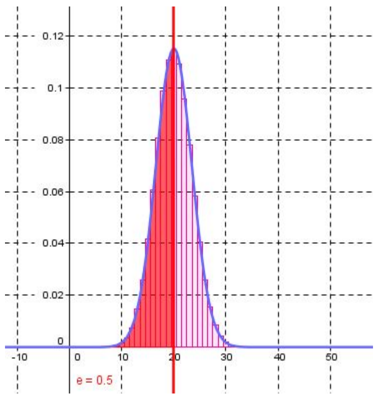
Remarque :
Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs de la série sont concentrées autour de la moyenne, la courbe est plus "serrée". (voir les graphiques ci-dessous pour les cas, $n = 30$).

1.3 Intervalle de fluctuation

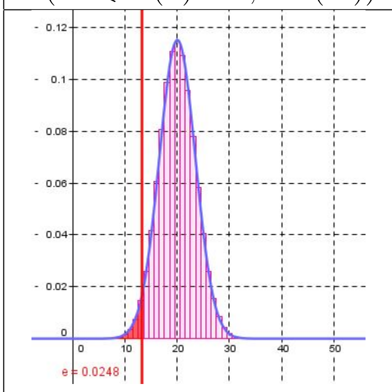
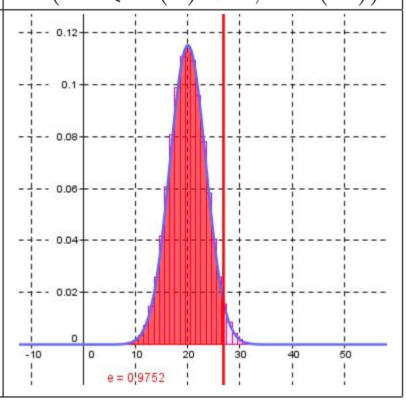
1.3.1 Activité

– ouvrir le document géogébra "loi binomiale loi normale intervalle".
– Les caractéristiques de la loi Binomiale de paramètres $(50; 0,4)$ apparaissent en rose, notamment dans la partie tableur.
– Tout ce qui se réfère à la loi Normale de paramètres $(np; \sqrt{npq})$ est en bleu.

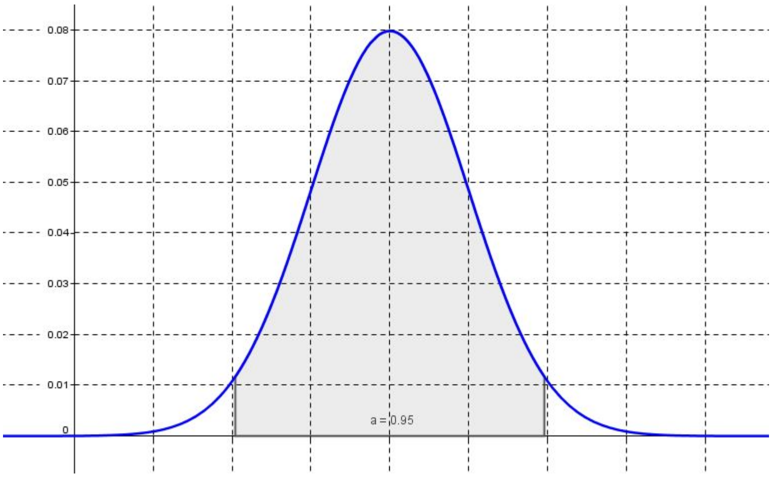
1. Dans la partie tableur, quelle formule a été saisie en cellule C4 ?
2. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ associés à la variable X, les paramètres de la loi Normale.
3. Lire $P(X \leqslant 20)$. Retrouver les résultats avec votre calculatrice.
4. Cocher l'approximation de $P(X <= k)$ (par la loi Normale). Un curseur k apparait. Modifier la valeur de k pour trouver une approximation de $(P(X \leqslant k)$ par la lecture de la valeur e sur le graphique. Vous devez obtenir la figure suivante :



5. Donner la valeur de e. Que constatez-vous ?
6. De la même manière, lire une approximation de $P(X \leqslant 30)$. En déduire $(P(X > 30)$.
7. (a) Calculer (dans la barre de saisie de géogébra) $E(X) - 1,96\sigma(X)$ puis $E(X) + 1,96\sigma(X)$, arrondir à 0,1.
   (b) En déduire par lecture de la loi Normale (en faisant varier k), $P(E(X) - 1,96\sigma(X) \leqslant X < E(X) + 1,96\sigma(X))$.

$P(X \leqslant E(x) - 1,96\sigma(X))$	$P(X \leqslant E(x) + 1,96\sigma(X))$
	

Propriété :
Soit une loi Normale de paramètres (m, σ) représentée par une courbe "en cloche" comme suit :



L'intervalle de normalité de normalité au seuil de 95% est donné par :

$$[m - 1,96\sigma; m + 1,96\sigma] \tag{1}$$

Dans la pratique, on utilise l'intervalle simplifié (à connaître) :

$$[m - 2\sigma; m + 2\sigma] \tag{2}$$