Temps d'attente, lois de probabilités continues

Table des Matières

Temps d'attente, lois de probabilités continues

Pour l'ensemble du cours, les courbes sont tracées dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

I. Loi de probabilité à densité

I. A. Définition de la densité

Définition

Soit X est une variable aléatoire qui à chaque issue d'un univers associe un sous intervalle $I=[a\,;\,b]$ de $\mathbb{R}=]-\infty\,;\,+\infty[$, et f une fonction :

- continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
- positive sur $\mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$

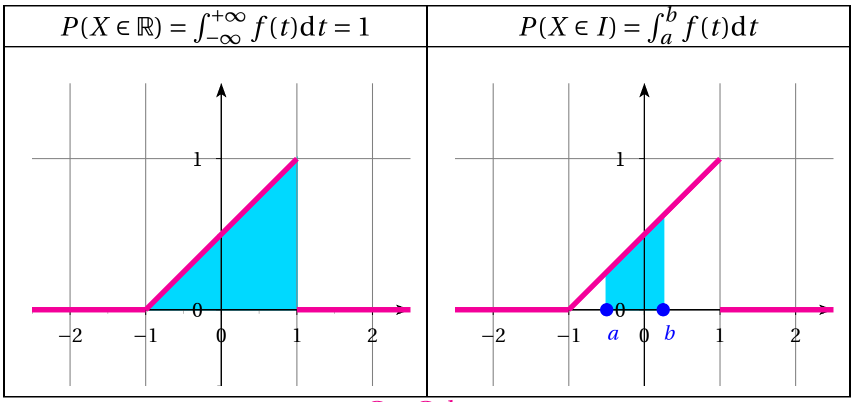
On dit que X suit la loi de **densité** f.
La **loi de probabilité** de densité f sur $\mathbb{R}$ est telle que pour tout intervalle $I=[a\,;\,b]$ contenu dans $\mathbb{R}$, la probabilité de l'événement $\{X\in I\}$ est :
L'aire de l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que
$a\leqslant x\leqslant b$ et $0\leqslant y\leqslant f(x)$.
On note alors : $P(X\in I)=P(a\leqslant X\leqslant b)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 1

Soit f définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x)=0,5x+0,5$ et $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}\setminus[-1\,;\,1]$.

1. Montrer que f est une fonction de densité sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $P(-0,5<X<0,25)$.
3. $\forall x\in[-1\,;\,1]$, déterminer $F(x)=P(X\leqslant x)=P(-1<X\leqslant x)$.

Illustration :



GeoGebra

I. B. Propriétés

Propriété

Soit X une variable aléatoire continue sur un intervalle I , munie d'une fonction de densité f sur $\mathbb{R}$.

- $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ (représente la probabilité de l'univers)
- $0 \leqslant P(X \in I) \leqslant 1$ (une probabilité est comprise entre 0 et 1)
- $\forall c \in \mathbb{R}, P(X = c) = 0$ et $\forall c \in \mathbb{R}, P(X < c) = P(X \leqslant c)$ (propriété propre au variable continue, en un point c, la probabilité est nulle)
- Si $[c\,;\,d] \cap [k\,;\,l] = \emptyset$ alors $P(X \in [c\,;\,d] \cup [k\,;\,l]) = P(X \in [c\,;\,d]) + P(X \in \cup[k\,;\,l])$ (union disjointe ou incompatible)
- $\forall c \in [a\,;\,b], P(X \in [a\,;\,c]) + P(X \in [c\,;\,b]) = P(X \in [a\,;\,b])$ (relation de Chasles)

Démonstration 1

Admise

I. C. Fonction de répartition F

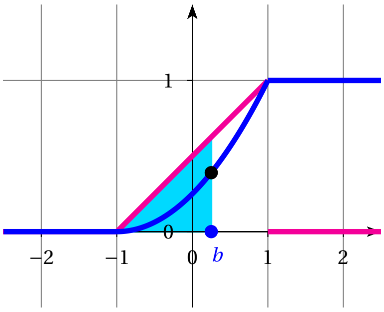
Définition

Soit une variable aléatoire continue sur un intervalle $\mathbb{R}$, munie d'une fonction de densité f sur I.
On appelle fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$ la fonction qui à un nombre réel x associe
$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Exemple

On reprend la fonction de densité définie que $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = 0,5x + 0,5$. La représentation de la fonction de répartition établie dans l'exercice 1 est la suivante :



GeoGebra

Propriété

a et b sont deux nombres réels, $a < b$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} = 1.$
2. $P(X > x) = 1 - F(x)$.
3. $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

☞**Démonstration 2**

Évidente

I. D. Espérance

✒ **Définition**

Soit X une variable aléatoire continue sur $[a;b]$, munie d'une fonction de densité f sur $\mathbb{R}$.
L'espérance de densité f sur $\mathbb{R}$ est
$E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$

☞**Exercice 2**

Soit f la fonction de densité associée à une variable X, f est définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=0,5x+0,5$ et $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$.
Calculer l'espérance $E(x)$.

I. E. Écart-type

✒ **Définition**

Soit X une variable aléatoire continue sur $\mathbb{R}$, munie d'une fonction de densité f sur $\mathbb{R}$.

- La variance de densité f sur $\mathbb{R}$ est
  $V(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(x-E(X))^2\,\mathrm{d}x.$

- L'écart-type de densité f sur I est
  $\sqrt{V(X)}.$

✒ **Propriété**

$V(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x-E(X)^2=E(x^2)-E(X)^2.$

☞**Démonstration 3**

Laisser en exercice

☞**Exercice 3**

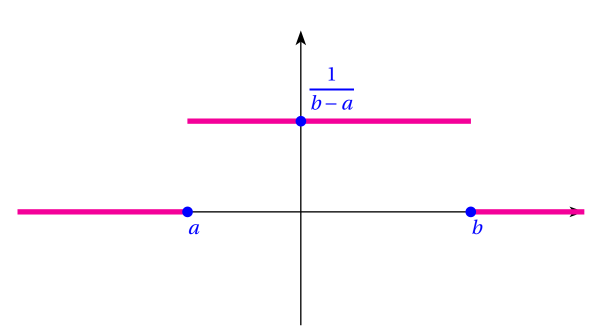
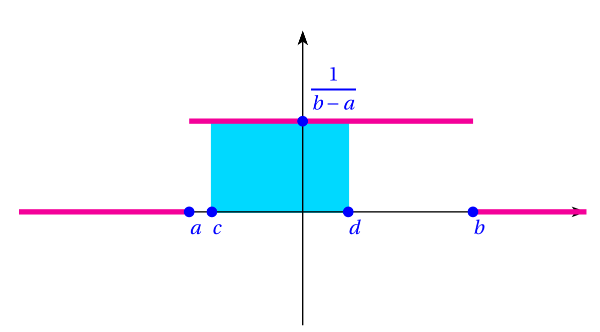
Soit f la fonction de densité associée à une variable X, f est définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=0,5x+0,5$ et $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$.
Déterminer la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

II. Loi uniforme

Activité 1

a et b sont deux nombres réels, $a < b$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) = \begin{cases} \forall t \in [a\,;\,b], f(t) = \dfrac{1}{b-a} \\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus [a\,;\,b], f(t) = 0 \end{cases} \end{array}$$

Représentation de la fonction f	$P(c < X < d)$
	

GeoGebra

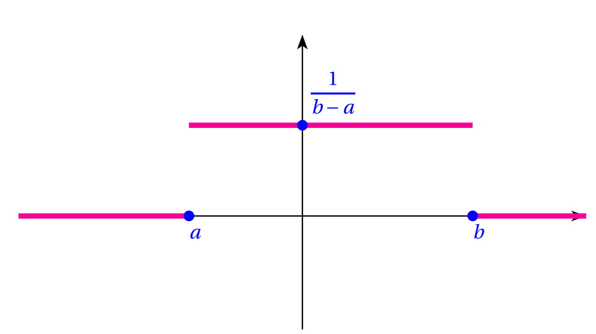
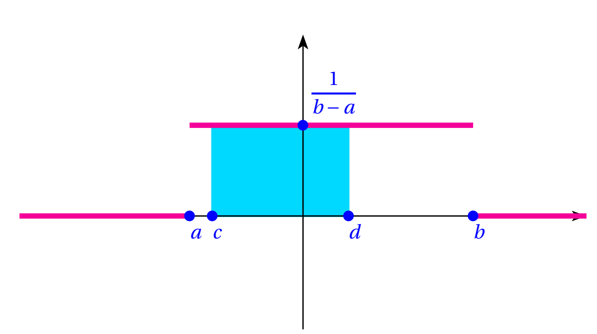
1. Montrer que f est une loi de densité de probabilité.
2. Déterminer l'expression de la fonction de répartition F.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

II. A. Fonction de densité de la loi uniforme

Définition

a et b sont deux nombres réels, $a < b$.
La fonction de densité de la loi uniforme de paramètres a et b est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) = \begin{cases} \forall t \in [a\,;\,b], f(t) = \dfrac{1}{b-a} \\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus [a\,;\,b], f(t) = 0 \end{cases} \end{array}$$

Représentation de la fonction f	$P(c < X < d)$
	

GeoGebra

Démonstration 4

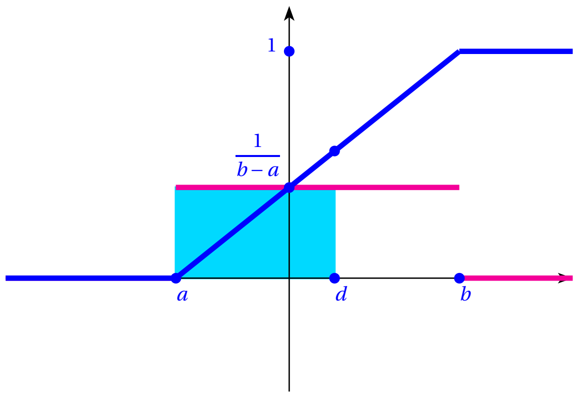
f est bien une fonction de densité d'après l'activité 1

II. B. Fonction de répartition de la loi uniforme

Propriété

Avec les notations précédentes, la fonction F de la loi uniforme de paramètres a et b vérifie :

- $\forall x < a, F(x) = 0$.
- $\forall x \in [a\ ;\ b], F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$.
- $\forall x > b, F(x) = 1$.



GeoGebra

Démonstration 5

Voir l'activité 1

II. C. Espérance et écart-type de la loi uniforme

Propriété

l'espérance E d'une loi uniforme de paramètres a et b est :

$$E(x) = \frac{b+a}{2}$$

l'écart-type d'une loi uniforme de paramètres a et b est :

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Démonstration 6

Voir l'activité 1

☞Exercice 4

À la station du boulevard Georges Périn, un bus passe toutes les 6 minutes. On note X le temps d'attente d'une personne à l'arrêt de bus. On admet que X suit une loi continue uniforme sur l'intervalle $[0;6]$.

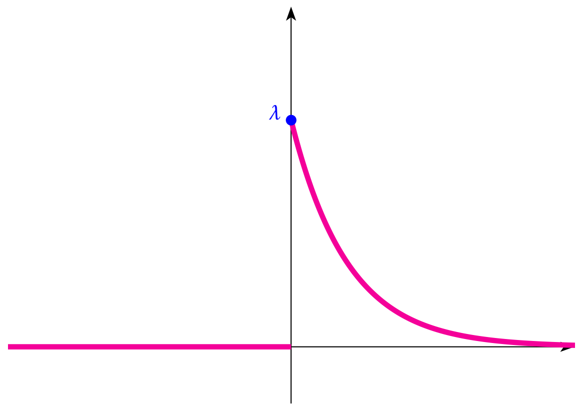
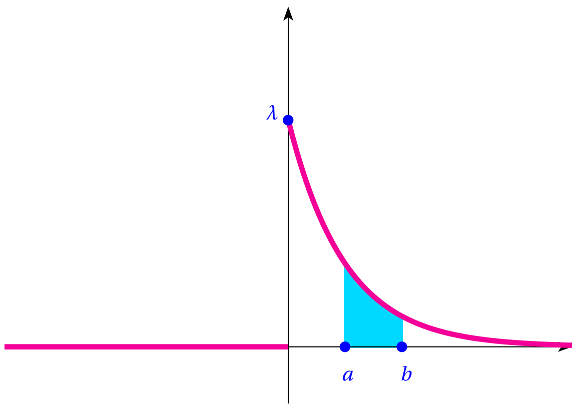
1. Donner la fonction de densité associée à la situation et sa représentation graphique. GeoGebra
2. Quelle est la probabilité que la personne attende exactement 4 minutes.
3. Calculer la probabilité que la personne attende entre 3 et 4 minutes.
4. Calculer que la personne attende moins de 2 minutes.
5. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

III. Loi exponentielle

☞Activité 2

Soit λ un nombre réel strictement positif.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) = \begin{cases} \forall t \in]-\infty\,;\,0], f(t) = 0 \\ \forall t \in [0\,;\,+\infty[= \lambda e^{-\lambda t} \end{cases} \end{array}$$

Représentation de la fonction f	$P(a < X < b)$
	

GeoGebra

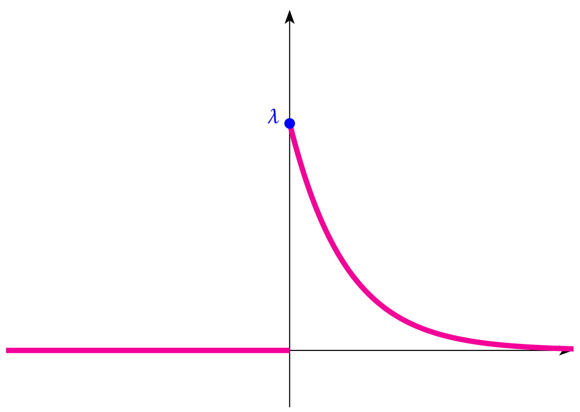
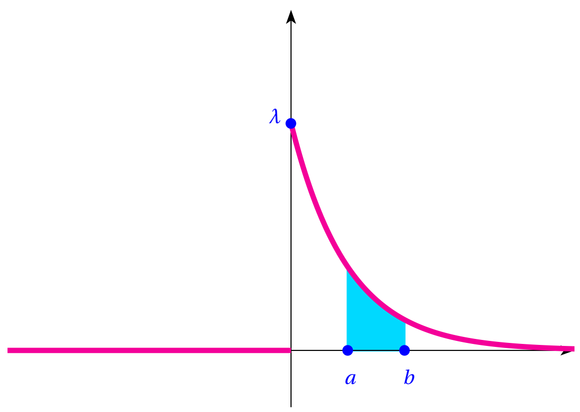
1. Montrer que f est une fonction de densité.
2. Déterminer l'expression la fonction de répartition F.
3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

III. A. Fonction de densité de la loi exponentielle

Définition

Soit λ un nombre réel strictement positif.
La fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre λ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f: \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) = \begin{cases} \forall t \in]-\infty\,;\,0],\, f(t) = 0 \\ \forall t \in [0\,;\,+\infty[= \lambda e^{-\lambda t} \end{cases} \end{array}$$

Représentation de la fonction f	$P(a < X < b)$
	

GeoGebra

Démonstration 7

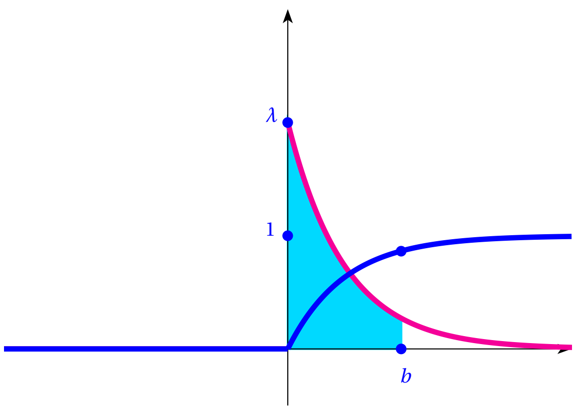
La fonction f est une fonction de densité d'après l'activité 2

III. B. Fonction de répartition F de la loi exponentielle

Propriété

Avec les notations précédentes, la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ vérifie :

- $\forall x < 0, F(x) = 0.$
- $\forall x \in [0\,;\,+\infty[, F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$



GeoGebra

Démonstration 8

Voir l'activité 2

III. C. Espérance et écart-type de la loi exponentielle

✒ **Propriété**

l'espérance E d'une loi exponentielle de paramètres λ est :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

l'écart-type d'une loi exponentielle de paramètres λ est :

$$\sigma(x) = \frac{1}{\lambda}$$

☞**Démonstration 9**

Voir l'activité 2

☞**Exercice 5**

La durée de vie d'une tablette, exprimée en années, est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On admet qu'en moyenne, une tablette a une durée de vie de 8 ans.

1. Quelle est la valeur de λ ?
2. Déterminer la probabilité qu'une tablette ait une durée de vie inférieure à 2 ans.
3. Déterminer la probabilité qu'une tablette ait une durée de vie supérieure à 10 ans.
4. Déterminer la probabilité qu'une tablette ait une durée de vie comprise entre 7 ans et 9 ans.

III. D. Loi de probabilité continue sans mémoire

☞**Activité 3**

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ et t un réel positif

1. Justifier que $P(X \in [t\,;\,+\infty[) = 1 - P(X \in [0\,;\,t])$.
   En déduire $P(X \in [t\,;\,+\infty[)$.
2. Soit s un réel positif, montrer que $P_{X\in[t\,;\,+\infty[}(X \in [t+s\,;\,+\infty[) = P([s\,;\,+\infty[)$.
3. Montrer que $P_{X\in[t\,;\,+\infty[}(X \in [t\,;\,t+s]) = P([0\,;\,s])$.

✒ **Propriété**

m et n sont deux réels strictement positifs non nuls.

- Si X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors elle est sans mémoire, c'est à dire :
$$P_{X>n}(X > m+n) = P(X > m)$$
- (réciproque) Si X qui suit une loi continue sans mémoire, c'est à dire $P_{X>n}(X > m+n) = P(X > m)$ alors, en posant $\lambda = \dfrac{1}{E(X)}$, X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

☞**Démonstration 10**

Admise

☞**Exercice 6**

On reprend l'exercice précédent.

La durée de vie d'une tablette, exprimée en années, est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

Si une tablette fonctionne 2 ans (elle a donc une durée de vie supérieure à 2 ans), quelle est la probabilité qu'elle fonctionne au moins 5 ans ?