Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage, loi de probabilités discrètes

Table des Matières

Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage, loi de probabilités discrètes

I. Introduction

Jacques ou Jakob Bernoulli (1654 - 1705) est un mathématicien et physicien suisse.
Dans *Ars Conjectandi* (1713), Jacques Bernoulli considère le problème de calcul, connaissant le nombre de cailloux tirés d'une urne, de la proportion des différents cailloux colorés de l'urne. Ce problème est connu comme le problème de probabilité inverse, et a été un sujet de recherche au XVIII^{e} siècle qui a attiré l'attention de Abraham de Moivre et de Thomas Bayes.
Bernoulli utilise alors le mot latin urna, qui initialement signifie un vase d'argile, mais ce mot est également utilisé dans la Rome antique pour tout type de boite pour collecter des bulletins de vote ; aujourd'hui encore le mot italien pour urne électorale est urna. Le mot de Bernoulli est peut-être issu de la loterie, des élections ou des jeux de hasard qui consistent à tirer une boule d'un récipient.

En théorie des probabilités, un problème d'urne est une représentation d'expériences aléatoires par un tirage aléatoire uniforme de boules dans une urne. L'urne est supposée contenir un certain nombre de boules qui sont indiscernables au toucher, c'est-à-dire que lorsque l'on tire une boule à l'intérieur, le tirage est aléatoire et chaque boule à l'intérieur de l'urne a la même chance d'être tirée, on parle d'équiprobabilité du tirage d'une boule de l'urne.
Il est possible de considérer plusieurs types de tirages : des tirages successifs avec ou sans remise, des tirages simultanés, des tirages successifs dans plusieurs urnes suivant des règles prédéfinies. Il est également possible de considérer formellement une infinité d'urnes et/ou une infinité de boule dans une urne.

II. Loi uniforme discrète

II. A. Définition

☞**Activité 1**

Les élections dans la Venise médiévale et de la renaissance, y compris celle du Doge de Venise, se faisait souvent par un tirage d'urne en utilisant des boules de couleur. (Wikipédia)
Supposons qu'une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10, les boules sont indiscernables au toucher.

On tire une boule de l'urne on note son numéro.
On note X la variable aléatoire qui donne le numéro de la boule tirée.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance, $E(X)$, de la variable aléatoire X.

Définition

Soit une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans un ensemble de n nombres réels $E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$.
Si pour tous réels x_i de l'ensemble E, $P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$ alors X suit une loi uniforme discrète.

II. B. Espérance et écart-type

Propriété

Soit une variable aléatoire X qui suit une uniforme discrète de n valeurs.

- l'espérance de X, $E(X)$, est $E(X) = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
- l'écart-type de X, $\sigma(X)$, est $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - E^2(X)}$

Démonstration 1

évidentes

III. Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

III. A. Épreuve de Bernoulli

III. A. 1. Définition

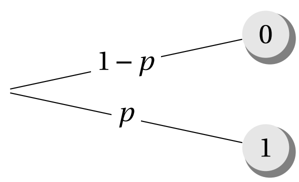
Activité 2

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges, les boules sont indiscernables au toucher.
On tire une boule de l'urne et on note sa couleur.
On considère l'événement S : « la boule tirée est blanche » et X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches tirées, c'est à dire le nombre de fois que l'événement S apparait.

1. Dans quel ensemble la variable aléatoire X prend ses valeurs ?
2. Faites un arbre pondéré de probabilités de la situation.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
4. Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Définition

On appelle épreuve de Bernoulli, une expérience aléatoire à deux issues (succès/échec).
On note p la probabilité d'un succès et X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de l'expérience.
$X \in \{0\ ;\ 1\}$.



On note $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$ qui se lit, la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

III. A. 2. Loi de probabilités

Propriété

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
La loi de probabilité de probabilité de la variable X est donnée dans le tableau suivant :

$X = k$	$X = 0$	$X = 1$
$P(X = k)$	$P(X = 0) = \ldots\ldots$	$P(X = 1) = \ldots\ldots$

Généralement on note $q = 1 - p$.

Démonstration 2

lecture de l'arbre pondéré de probabilités

III. A. 3. Espérance et écart-type

Propriété

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

- l'espérance de X, $E(X)$, est $E(X) = p$
- l'écart-type de X, $\sigma(X)$, est $\sigma(X) = \sqrt{pq}$

Démonstration 3

laissée en exercice

III. B. Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle schéma de Bernoulli la répétition d'épreuves (finie ou infinie) identiques et indépendantes (lors d'une expérience, le tirage n'influe pas sur la prochaine expérience.

IV. Exemple de répétition d'épreuves de Bernoulli : Loi géométrique

IV. A. Définition

☞**Activité 3**

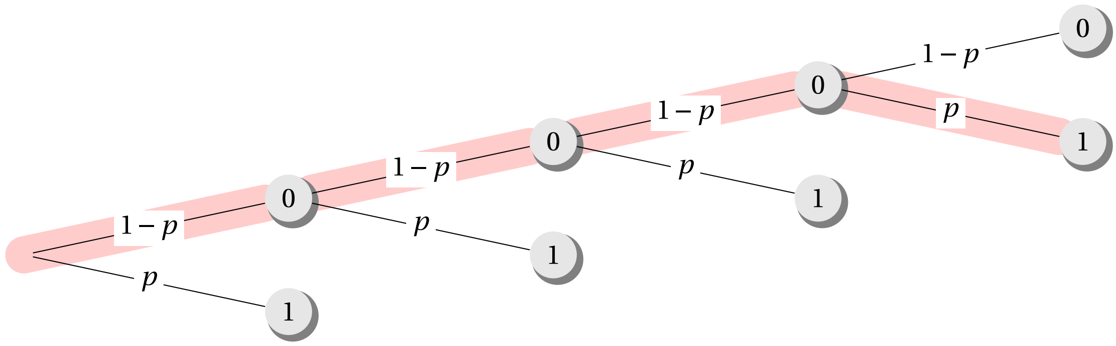
Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges, les boules sont indiscernables au toucher.
On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne et ainsi de suite tant que la couleur de la boule n'est pas blanche. On parle de répétition d'expériences d'épreuves de Bernoulli, les épreuves étant identiques et indépendantes (le tirage d'une boule de l'urne n'influe pas sur le tirage suivant).
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

1. Dans quel ensemble la variable aléatoire X prend ses valeurs ?
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

✒ **Définition**

Soit la répétition d'épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes.
La variable X compte le nombre d'expériences de Bernoulli nécessaires pour obtenir le premier succès.

$X \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ ...\} = \mathbb{N}^*$.
Voici une représentation pour $X = 4$:



On note $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ qui se lit, la variable aléatoire X suit une loi de Géométrique de paramètre p.

IV. B. Loi de probabilités

✒ **Propriété**

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi de Géométrique de paramètre p.
La loi de probabilité de probabilité de la variable X est :

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

☞**Démonstration 4**

lecture de l'arbre pondéré de probabilités

IV. C. Espérance et écart-type

✒ Propriété

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi de Géométrique de paramètre p.

- l'espérance de X, $E(X)$, est $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- l'écart-type de X, $\sigma(X)$, est $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$

☞Démonstration 5

admise

IV. D. Loi de probabilité discrète sans mémoire

☞Exercice 1

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges, les boules sont indiscernables au toucher.
On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne et ainsi de suite tant que la couleur de la boule n'est pas blanche.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.
La variable X suit une loi géométrique de paramètre p.

- Calculer la probabilité $P(X > 2)$.
- Calculer la probabilité $P(X > 3)$.
- Calculer la probabilité $P_{X>2}(X > 5)$.

✒ Propriété

m et n sont deux entiers naturels non nuls.

- Si X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p alors elle est sans mémoire, c'est à dire :
$$P_{X>n}(X > m+n) = P(X > m)$$
- (réciproque) Si X qui suit une loi sans mémoire, c'est à dire $P_{X>n}(X > m+n) = P(X > m)$ alors, en posant $p = P(X = 1)$, X suit une loi géométrique de paramètre p.

☞Démonstration 6

admise

V. Exemple de répétition d'épreuves de Bernoulli : Loi binomiale

V. A. Définition

☞**Activité 4**

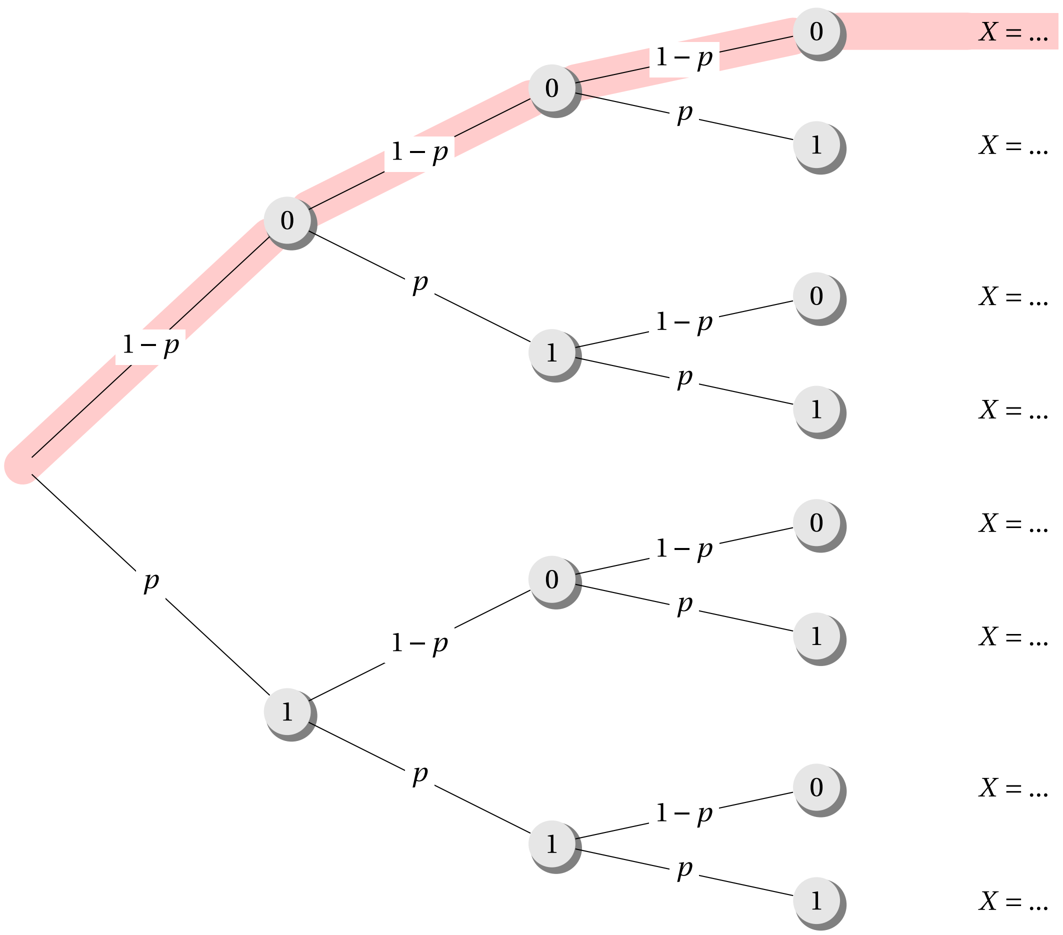
Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges, les boules sont indiscernables au toucher.
On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, on parle de répétition d'expériences d'épreuves de Bernoulli, les épreuves étant identiques et indépendantes (le tirage d'une boule de l'urne n'influe pas sur le tirage suivant).
On fait n expériences.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès c'est à dire le nombre de boules blanches.

1. Cas $n = 2$
   (a) Dans quel ensemble la variable aléatoire X prend ses valeurs ?
   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (d) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$
2. Cas $n = 3$
   (a) Dans quel ensemble la variable aléatoire X prend ses valeurs ?
   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (d) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$

Définition

Soit la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes.
La variable X compte le nombre de succès.

$X \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$.
Voici une représentation dans le cas où $n = 3$



On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n\ ;\ p)$ qui se lit, la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale de paramètres n et p.

V. B. Loi de probabilités

Propriété

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi Binomiale de paramètres n et p.
La loi de probabilité de probabilité de la variable X est :

$$P(X = k) = \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre de chemins qui mènent à k succès parmi n expériences. Ces chemins sont appelés coefficients binomiaux.

Démonstration 7

admise

Remarque

- $\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1, p)$.
- Pour $n = 2$: $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$.
- Pour $n = 3$: $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$.

V. C. Coefficients binomiaux

Activité 5

Relation entre les coefficients binomiaux

Soit un schéma de Bernoulli de n expériences et k un entier compris entre 0 et n.

1. A l'aide d'un arbre donner $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$.
2. Compléter l'arbre et donner $\binom{2}{0}$ et $\binom{2}{1}$ puis $\binom{2}{2}$.
3. Dans la construction de l'arbre à compléter, trouver une relation entre $\binom{3}{2}$ et $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{2}$.
4. Justifier $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
5. Justifier $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli de n expériences et k un nombre entier compris entre 0 et n.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Le triangle de Pascal pour $n \leqslant 5$:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Exemple de lecture des propriétés dans le triangle de Pascal :

- $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$,
- $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

Blaise Pascal est un mathématicien, physicien, philosophe français (1623-1662).
À 19 ans, il invente la première machine à calculer. Il développe deux principaux axes de recherches, il publie un traité de géométrie projective à seize ans ; ensuite il développe en 1654 une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donnant naissance au cours du XVIII^e siècle au calcul des probabilités, influencera fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

Algorithme et programme pour la recherche des coefficients binomiaux :

Deux listes L0 et L1 permettent de parcourir les lignes du triangle de Pascal :

$L0 \leftarrow [1, 0, ..., 0]$ (n zéro)
$L1 \leftarrow [1, 1, ..., 0]$ ($n-1$ zéro)
Pour i variant de 1 à n faire :
    Pour j variant de 1 à $i+1$ faire :
        $L1[j] = L0[j-1] + L0[j]$
    Fin Pour
    $L0 \leftarrow L1$
Fin Pour

```python
def coefficientsbinomiaux(n):

    L0=[0]*(n+1)
    L1=[0]*(n+1)
    L0[0]=1
    L1[0]=1
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,i+1):
            L1[j]=L0[j-1]+L0[j]
        for j in range(n+1):
            L0[j]=L1[j]
    return L1
```

triangle_pascal.py

V. D. Espérance et écart-type

Propriété

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

- l'espérance de X, $E(X)$, est $E(X) = np$
- l'écart-type de X, $\sigma(X)$, est $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Démonstration 8

admise