Modèles définis par une fonction d'une variable, limites d'une fonction, continuité, complément dérivation

Table des Matières

Modèles définis par une fonction d'une variable, limites d'une fonction, continuité, complément dérivation

I. Limites

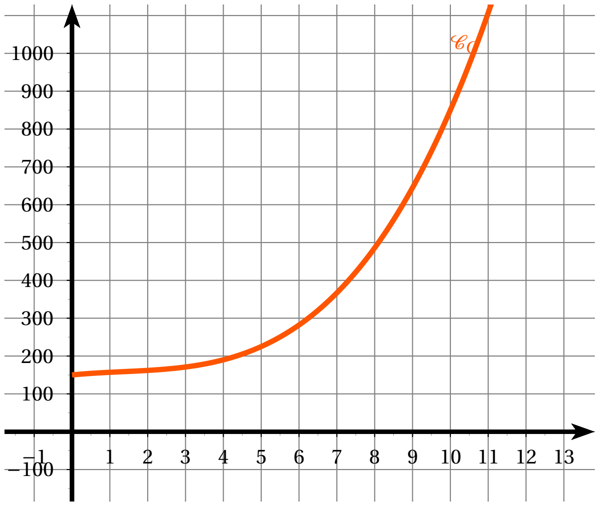
I. A. Introduction

Activité 1

Une entreprise fabrique du parfum.
Le coût de fabrication de ce parfum, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par une fonction C qui dépend de la variable q, les quantités de productions exprimées en milliers de litres. on considère une fonction de coût d'un produit

$$\begin{array}{rccl} C : & [0\,;\,+\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q & \longmapsto & C(q) = q^3 - 4q^2 + 10q + 150 \end{array}$$

Dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ on note $\mathscr{C}_C$ la courbe de la fonction C :



1. Étude de la fonction coût :

   (a) Déterminer le coût fixe associé à la production du parfum.

   (b) Étudier les variations de la fonction C.

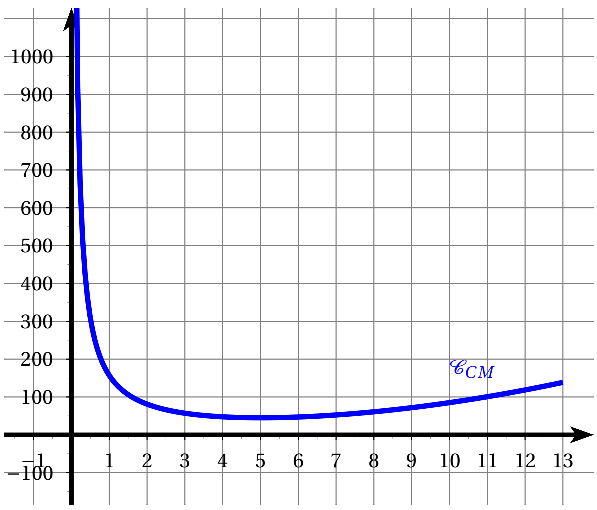
   (c) Que dire du coût si les quantités de production sont « infinies » ?

2. Étude de la fonction coût moyen :

   Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} CM : &]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q & \longmapsto & \dfrac{C(q)}{q} \end{array}$$

   Cette fonction modélise la fonction coût moyen. Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthogonal on note $\mathscr{C}_{CM}$ la courbe de la fonction CM :



   (a) Montrer que $CM(q) = q^2 - 4q + 10 + \dfrac{150}{q}$ puis que $CM'(q) = \dfrac{2(q-5)(q^2+3q+15)}{q^2}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction CM.

   (c) Si q est proche de 0, que pouvez-vous dire du coût moyen ?

   (d) Si q tend vers $+\infty$, que pouvez-vous dire du coût moyen ?

I. B. Limites en l'infinie : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$

Théorème

Limites en l'infini des fonctions de référence

identité	carré	cube	inverse	exponentielle	racine carrée
$\lim\limits_{x\to-\infty} x = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \ldots\ldots\ldots$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \ldots\ldots\ldots$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration 1

admise

Définition

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthogonal du plan.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = L$ est dite asymptote horizontale à la courbe de la fonction f.

Exercice 1

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthogonal du plan.
Parmi les fonctions de référence, donner celles dont les courbes admettent une asymptote horizontale, donner l'équation de cette asymptote.

I. C. Limites infinie en un point

Théorème

Limite infinie en un point des fonctions de référence

inverse
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration 2

admise

✒ Définition

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthogonal du plan.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est dite asymptote verticale à la courbe de la fonction f.

☞Exercice 2

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthogonal du plan.

Donner l'équation de l'asymptote verticale de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

I. D. Opérations de base

I. D. 1. Multiplication par un réel

✒ Théorème

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et u une fonction. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du produit λu. L est un nombre réel.

$\lim u(x)$	$-\infty$	$+\infty$	L
$\lambda < 0 : \lim \lambda \times u_n$	$+\infty$	$-\infty$	λL
$\lambda > 0 : \lim \lambda \times u_n$	$-\infty$	$+\infty$	λL

☞Exercice 3

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3x^2\right)$:
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $-3 < 0$
   donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3x^2\right) = -\infty$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-3}{x}\right)$,
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} -0,25x$.

I. D. 2. Addition

✒ Théorème

Soit u et v deux fonctions. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites de la somme $u + v$. L et L' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée*.

$\lim u(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim v(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	L'	L	L
$\lim u(x) + v(x)$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$

☞Exercice 4

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+e^x\right)$,

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)$,

I. D. 3. Multiplication

✒ Théorème

Soit u et v deux fonctions. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du produit uv. L et L' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée.*

$\lim u(x)$	$\pm\infty$	L	$L\neq 0$	0
$\lim v(x)$	$\pm\infty$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim u(x)\times v(x)$	$\pm\infty$	$L\times L'$	$\pm\infty$	FI

☞Exercice 5

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\times\sqrt{x}\right)$:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right)=+\infty$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\times\sqrt{x}\right)=+\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\left(e^x-x\right)$.

I. D. 4. Inverse

✒ Théorème

Soit v une fonction. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites de l'inverse $\dfrac{1}{v}$. L est un nombre réel.

$\lim v(x)$	$\pm\infty$	$L\neq 0$	0^-	0^+
$\lim\dfrac{1}{v(x)}$	0	$\dfrac{1}{L}$	$-\infty$	$+\infty$

I. D. 5. division

✒ Théorème

Soit u et v deux fonctions. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du quotient $\frac{u}{v}$. L et L' sont deux nombres réels, FI voulant dire *Forme Indéterminée*.

$\lim u(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	l	L	$L \neq 0$	0
$\lim v(x)$	$\pm\infty$	l'	$\pm\infty$	$L' \neq 0$	0	0
$\lim \dfrac{u(x)}{v(x)}$	FI	$\pm\infty$	0	$\dfrac{L}{L'}$	$\pm\infty$	FI

☞**Exercice 6**

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$:
   $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(x^2\right) = 1$
   $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 0^+$
   donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$,
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}+2}{\dfrac{-3}{x}-1}$.

I. D. 6. Les formes indéterminées

✒ Exemple

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x\right)$:
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$
   on ne peut pas conclure directement. Une technique de calcul doit permettre de lever l'indétermination, ici une factorisation : pour x assez grand (en particulier x non nul) on a
   $x^2 - x = x^2\left(\frac{x^2}{x^2} - \dfrac{x}{x^2}\right) = x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1$
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x\right) = +\infty$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-x^2\right)$. On remarque que pour une même opération de limite $(+\infty + -\infty)$ on a un résultat différent, c'est pourquoi on parle de forme indéterminée.
   Aussi, le calcul formel d'une calculatrice ou d'un logiciel pourra vous donner le résultat d'une limite trop complexe, ce qui permet d'éviter les calculs trop techniques.

II. Continuité

☞**Activité 2**

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$:

x	0		2		5		10
f	0	↗	15	↘	-8	↗	5

1. Déterminer le nombre de solution(s) possible de l'équation $f(x) = 0$ donner un intervalle qui contient chacune de ce(s) solution(s).

2. Déterminer le nombre de solution(s) possible de l'équation $f(x) = 3$ donner un intervalle qui contient chacune de ce(s) solution(s).

✒ **Définition**

La définition de la continuité suivante est une sensibilisation à la notion de continuité, ce n'est pas une définition mathématique.

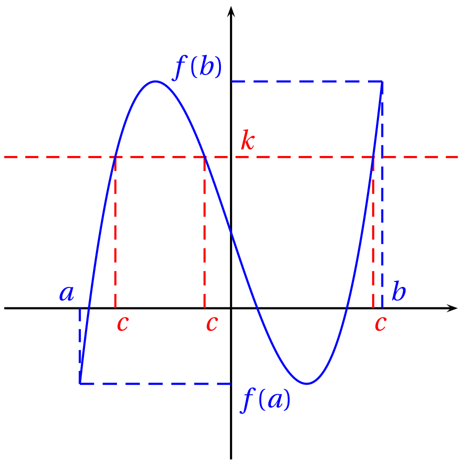
« On dira qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si on ne lève pas le crayon lors du tracé de la courbe de la fonction sur l'intervalle I »

✒ **Théorème**

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; b]$.

Si f est continue sur I alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre c de I tel que $f(c) = k$.



☞**Démonstration 3**

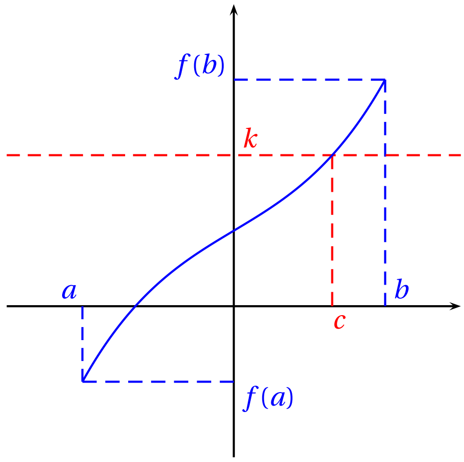
admise

Corollaire

Cas des fonctions strictement monotones

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; b]$.

Si f est continue sur I et strictement monotone sur I alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique un nombre c de I tel que $f(c) = k$.



Démonstration 4

admise

Remarque

Pour justifier que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a; b]$ on doit vérifier les trois points suivants :

- f est continue sur $[a; b]$.
- f est strictement monotone sur l'intervalle $[a; b]$.
- k est dans l'intervalle $[f(a); f(b)]$, si f est croissante, $[f(b); f(a)]$ si f est décroissante.

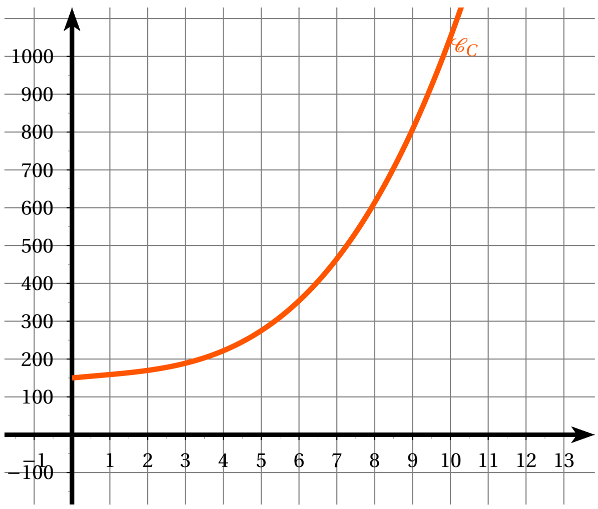
Exercice 7

Une entreprise fabrique du parfum.

Le coût de fabrication de ce parfum, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par une fonction C qui dépend de la variable q, les quantités de productions exprimées en milliers de litres. on considère une fonction de coût d'un produit

$$\begin{array}{rccl} C : & [0 ; +\infty] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & q & \mapsto & C(q) = q^3 - 2q^2 + 10q + 150 \end{array}$$

Dans un repère orthogonal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ on note $\mathscr{C}_C$ la courbe de la fonction C :



1. On admet que la fonction C est strictement croissante sur $[0 ; 10]$.
   Justifier que l'équation $C(x) = 400$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 1, 10^{-1}, 10^{-2} 10^{-3} puis 10^{-4} de la solution α.
3. En déduire la valeur approchée à 10^{-3} de α, interpréter avec la situation.

III. Complément dérivation : fonctions composées

Théorème

Soit une fonction f dérivable et a et b deux réels, a est non nul.
La fonction $x \rightarrow f(ax+b)$ est dérivable :

$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b)$$

Démonstration 5

admise

Remarque

L'ensemble de définition et de dérivabilité sera donné, il est admis.

Exercice 8

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $p(x) = \sqrt{2x+5}$ sur $\left]\frac{-5}{2}\ ;\ +\infty\right[$
2. $q(x) = (4x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$
3. $r(x) = e^{-x+2}$ sur $\mathbb{R}$

Théorème

Soit u une fonction dérivable.
Les fonctions composées suivantes sont dérivables :

- $[u^2]' = 2u'u$,
- $[e^u]' = u'e^u$.

Exercice 9

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, pour les deux premières, deux méthodes de calculs sont possibles :

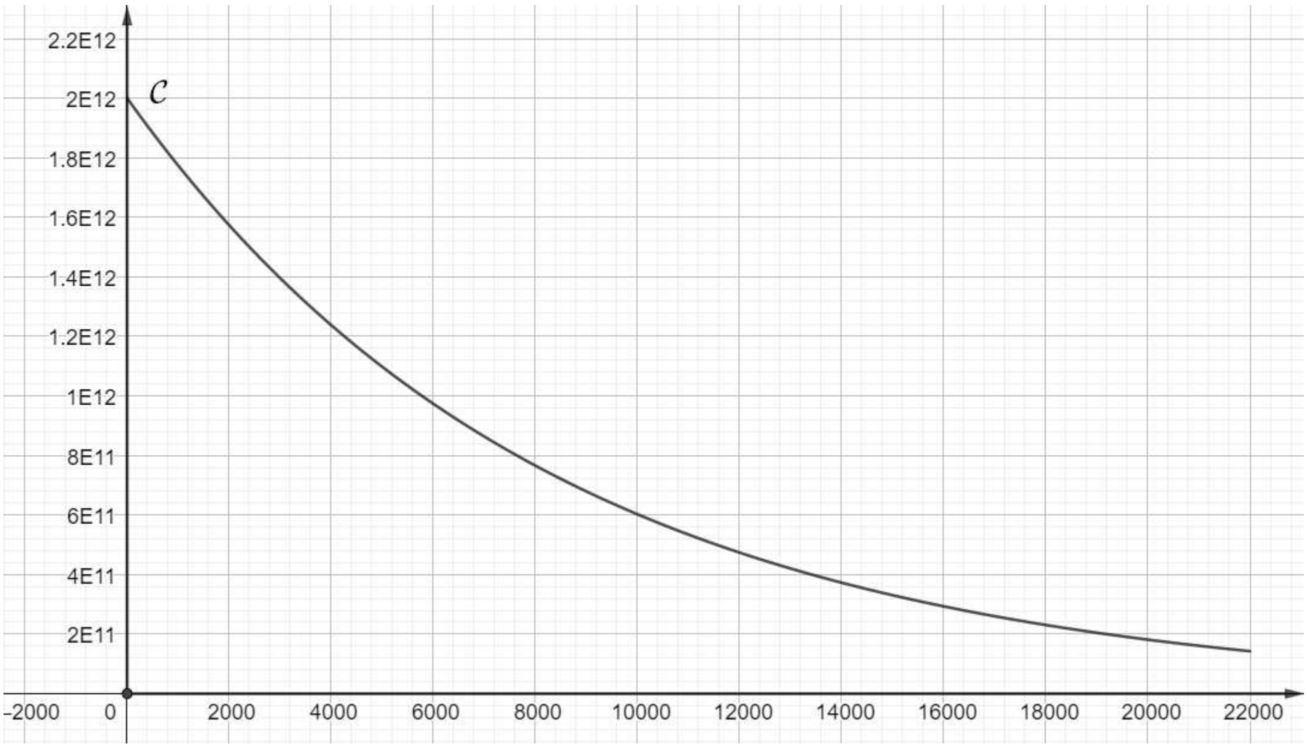
1. $f(x) = (e^x)^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = (e^x + x)^2$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$

☞**Exercice 10**

La datation par le carbone 14 permet d'estimer l'âge de vestiges archéologiques, peintures rupestres, sédiments etc...
Son principe est d'utiliser les propriétés de décroissance radioactive de l'isotope carbone 14, atome présent dans toute matière organique et dans les carbonates. Cette technique est utilisée pour dater des objets de quelques centaines d'années à 50 000 ans environ.
La décroissance de radioactivité du carbone 14 est modélisée par la fonction N :

$$\begin{array}{lrcl} N: & [0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & N(t)=N_0e^{-1,2\times10^{-4}t} \end{array}$$

t est le temps, il est exprimé en année, $N(t)$ est le nombre d'atomes radioactifs de carbone 14 à l'instant t, N_0 est le nombre d'atomes radioactifs de carbone 14 à l'instant 0.
Lors des premières visites des grottes de Lascaux dans les années 1940, André Glory et son équipe de scientifiques entreprennent quelques relevés. Il y trouve notamment des pointes de sagaies décorées en bois de renne ainsi que du charbon de bois provenant de lampes. Ces échantillons de charbons ont été analysés expérimentalement. Pour cela, un procédé technique a permis de déterminer qu'un échantillon de 40 g de charbon est constitué de 2×10^{24} atomes de carbone 12 et de $2,6\times10^{11}$ atomes de carbone 14. On admet que $N_0=2\times10^{12}$.
Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthogonal, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative :



1. Calculer $N'(t)$.
2. Vérifier que la fonction N est décroissante.
3. Donner la limite de N en $+\infty$.
4. Déterminer une date de l'échantillon prélevé, c'est à dire résoudre l'équation $N(t)=2,6\times10^{11}$, à l'année près, expliquer les démarches.