# Modèle d'évolution discret, suites

## Table des Matières

# Modèle d'évolution discret, suites

# I. Limite d'une suite

## I. A. Limite finie d'une suite : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = L$

**Activité 1**

**Évolution de la valeur d'un objet**

Une voiture neuve coûte $p_0 = 25\,000$ (euros). Chaque année, le prix de la voiture perd 10% de sa valeur, on note $p_n$ le prix au bout de $n$ année.

1. Calculer $p_1$ puis $p_2$.
2. Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$. (forme de récurrence)
3. Quelle est la nature de la suite $(p_n)$.
4. En déduire $p_n$ en fonction de $n$. (expression explicite)
5. Déterminer le sens de variation de la suite $(p_n)$.
6. Quel est le dernier nombre $N$ calculé par l'algorithme ?

$\epsilon \leftarrow 1000$

$N \leftarrow 0$

$u \leftarrow 25\,000$

Tant que $u > \epsilon$ faire

$\quad N \leftarrow N+1$

$\quad u \leftarrow u \times 0,9$

Fin tant que

```python
def seuil(e):
    '''
    Pour e donné, renvoie une liste de deux éléments
    [N,u]
    '''
    N=0
    u=25000
    while u>e:
        N=N+1
        u=u*0.9
    return [N,u]
```

programmeseuil_1.py

7. Quelle semble être la limite de la suite $(p_n)$ (c'est à dire donner $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$) ? figure

**Définition**

Soit une suite $(u_n)$.
Pour tout nombre $\epsilon$ de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, s'il existe un entier $N$ tel que pour tout $n > N$, $|u_n - L| < \epsilon$ ($L \in \mathbb{R}$), alors on dit que la limite de $u_n$ (quand $n$ tend vers $+\infty$) est $L$ et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

On dit aussi que la suite $u$ converge vers $L$. Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

**Propriété**

Si une suite a pour limite $L$ alors cette limite est unique.

☞**Démonstration 1**

admise

## I. B. Limite infinie d'une suite : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$

☞**Activité 2**

**Évolution d'un capital**

Soit un capital $C_0 = 500$ (euros) déposé sur un compte rémunéré annuellement à un taux d'intérêt composé de 2%. On note $C_n$ le capital, exprimé en euros, disponible au bout de $n$ années.

1. Calculer $C_1$ puis $C_2$.
2. Exprimer $C_{n+1}$ en fonction de $C_n$. (expression de récurrence)
3. Quelle est la nature de la suite $(C_n)$.
4. En déduire $C_n$ en fonction de $n$. (expression explicite)
5. Déterminer le sens de variation de la suite $(C_n)$.
6. Quel est le dernier nombre $N$ calculé par l'algorithme ?

$A \leftarrow 1000$

$N \leftarrow 0$

$u \leftarrow 500$

Tant que $u < A$ faire

  $N \leftarrow N + 1$

  $u \leftarrow u * 1,02$

Fin tant que

```python
def seuil(A):
    '''
    Pour A donné, renvoie une liste de deux éléments
    [N,u]
    '''
    N=0
    u=500
    while u<A:
        N=N+1
        u=u*1.02
        print("étape",N,"A",A,"N",N,"u",u)
    return [N,u]
```

programmeseuil_2.py

7. Quelle semble être la limite de la suite $(C_n)$ (c'est à dire donner $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n$) ?

figure

✒ **Définition**

Soit une suite $(u_n)$.

- Pour tout nombre $A$ de $\mathbb{R}_+$, s'il existe un entier $N$ tel que pour tout $n > N$, $u_n > A$, alors on dit que la limite de $u_n$ (quand $n$ tend vers $+\infty$) est $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

  On dit aussi que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

- Pour tout nombre $A$ de $\mathbb{R}_-$, s'il existe un entier $N$ tel que pour tout $n > N$, $u_n < A$, alors on dit que la limite de $u_n$ (quand $n$ tend vers $+\infty$) est $-\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

  On dit aussi que la suite $(u_n)$ diverge vers $-\infty$.

## I. C. Limite d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique

✒ **Propriété**

- Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ :
  - si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
  - si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- Soit $(v_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme positif :
  - si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ ; en particulier on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
  - si $1 < q$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ ; en particulier on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

☞**Exercice 1**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} -1 + 3n$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} -2n + 5$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} 5 \times 0,2^n$

☞**Exercice 2**

Soit la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 0,25$.

1. Déterminer une expression en fonction de $n$ de la somme $S_n$ des termes $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.
2. En déduire la limite de la suite $(S_n)$.

## I. D. Opérations sur les limites

### I. D. 1. Multiplication par un réel

**✒ Théorème**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)$ une suite. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du produit $\lambda.u_n$. $l$ est un nombre réel.

| $\lim u_n$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l$ |
|---|---|---|---|
| $\lambda < 0 : \lim \lambda \times u_n$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\lambda l$ |
| $\lambda > 0 : \lim \lambda \times u_n$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\lambda l$ |

☞**Exercice 3**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3n^2\right)$ :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2\right) = +\infty$
   $-3 < 0$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-3n^2\right) = -\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-3}{n}\right)$,

### I. D. 2. Addition

**✒ Théorème**

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites de la somme $u_n + v_n$. $l$ et $l'$ sont deux nombres réels, $FI$ voulant dire *Forme Indéterminée*.

| $\lim u_n$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $l'$ | $l$ | $l$ |
| $\lim u_n + v_n$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $FI$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

☞**Exercice 4**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right)$ :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n^2 - n\right)$,

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-2}{n} - 5n\right)$.

### I. D. 3. Multiplication

**✒ Théorème**

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du produit $u_n v_n$. $l$ et $l'$ sont deux nombres réels, $FI$ voulant dire *Forme Indéterminée*.

| $\lim u_n$ | $\pm\infty$ | $l$ | $l \neq 0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $\pm\infty$ | $l'$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim u_n \times v_n$ | $\pm\infty$ | $l \times l'$ | $\pm\infty$ | $FI$ |

☞**Exercice 5**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 \times \sqrt{n}\right)$ :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\right) = +\infty$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 \times \sqrt{n}\right) = +\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-2n + \dfrac{1}{n}\right)$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

### I. D. 4. Inverse

**✒ Théorème**

Soit $(v_n)$ une suite. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites de l'inverse $\dfrac{1}{v_n}$. $l$ est un nombre réel.

| $\lim v_n$ | $\pm\infty$ | $l \neq 0$ | $0^-$ | $0^+$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim \dfrac{1}{v_n}$ | $0$ | $\dfrac{1}{l}$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

☞**Exercice 6**

1. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{-2n+3}$. Pour étudier la limite en $-\infty$ :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n+3 = -\infty$ par les résultats des limites de quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{-2n+3} = 0$ ($0^-$ : 0 par valeur inférieure).

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

### I. D. 5. division

**✒ Théorème**

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites. Le tableau suivant donne les résultats sur les limites du quotient $\frac{u_n}{v_n}$. $l$ et $l'$ sont deux nombres réels, $FI$ voulant dire *Forme Indéterminée.*

| $\lim u_n$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $l$ | $l$ | $l \neq 0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $\pm\infty$ | $l'$ | $\pm\infty$ | $l' \neq 0$ | $0$ | $0$ |
| $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ | $FI$ | $\pm\infty$ | $0$ | $\dfrac{l}{l'}$ | $\pm\infty$ | $FI$ |

☞**Exercice 7**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2}{\dfrac{1}{n}-1}\right)$ :
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right)=+\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)=-1$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2}{\dfrac{1}{n}-1}\right)=-\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+2}{\dfrac{-3}{n}-1}$.

### I. D. 6. Les formes indéterminées

**✒ Exemple**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-n\right)$ :
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right)=+\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n)=-\infty$
   on ne peut pas conclure directement. Une technique de calcul doit permettre de lever l'indétermination, ici une factorisation : pour $n$ assez grand (en particulier $n$ non nul) on a
   $n^2-n=n^2\left(\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{n}{n^2}\right)=n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right)=+\infty$
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-n\right)=+\infty$

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-n^2\right)$. On remarque que pour une même opération de limite $(+\infty+-\infty)$ on a un résultat différent, c'est pourquoi on parle de forme indéterminée.
   Aussi, le calcul formel d'une calculatrice ou d'un logiciel pourra vous donner le résultat d'une limite trop complexe, ce qui permet d'éviter les calculs trop techniques.

## I. E. Comparaison de limites

**Théorème**

Soient deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ et $N$ un entier naturel.
Si pour tout $n > N$, $u_n \leqslant v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$ alors $L \leqslant L'$.

**Démonstration 2**

admise

**Théorème**

1. Soient deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ et $N$ un entier naturel.
   Si pour tout $n > N$, $u_n \leqslant v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. Soient deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ et $N$ un entier naturel.
   Si pour tout $n > N$, $u_n \leqslant v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**Démonstration 3**

admise

**Exercice 8**

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n\sqrt{n} - 7n$.

1. Montrer qu'à partir d'un rang $N$ $(\forall n > N)$, $u_n > n$.
   On pourra utiliser une forme factorisée de $u_n$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

figure

**Théorème**

**Théorème des gendarmes**

Soit $(u_n)$ , $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $N$ $(\forall n \in \mathbb{N},\ n > N)$, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites convergentes de même limite $L$, alors la suite $(w_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$.

**Démonstration 4**

admise

**Exercice 9**

Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ non nul par $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier $n$, $\dfrac{-1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ (soit $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$).
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   figure
2. De la même manière que déterminer la limite de la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.
   figure

# II. Suites arithmético-géométriques

## II. A. Introduction

☞**Activité 3**

**Évolution d'une population**

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite $(u_n)$ où $u_n$ désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Donner $u_0$ puis exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. (forme de récurrence)
2. Est-ce que la suite est géométrique ? arithmétique ?
3. Soit la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - 60$
   (a) Montrer que $(v_n)$ est géométrique de raison $0,95$.
   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   (c) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
   (d) Est-ce que la suite $(u_n)$ converge ? Interpréter avec la situation.

## II. B. Définition

✒ **Définition**

Soit une suite définie pour tout entier naturel $n$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a$ est un réel non nul et différent de 1 et $b$ un réel.
Le suite $(u_n)$ est dite arithmético-géométrique.

## II. C. Propriete

✒ **Propriété**

Soit $(u_n)$ une suite arithmético-géométrique telle que $u_{n+1} = au_n + b$ où $a$ est un réel non nul et différent de 1 et $b$ un réel.
La suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique de raison $a$ et $u_n = \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)a^n + \dfrac{b}{1-a}$

☞**Démonstration 5**

1. Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $a$, donner $v_0$ en fonction de $u_0$.
2. Donner l'expression de $v_n$ en fonction de $n$. (forme explicite)
3. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$. (forme explicite)

☞**Exercice 10**

**Loi de refroidissement de Newton**

La loi de refroidissement d'Isaac Newton (anglais 1642-1727) stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Par exemple, un café est servi à une température initiale de 80 degré Celsius dans un milieu dont la température de 18 degré Celsius.

Ainsi pour tout entier naturel $n$, on note $T_n$ la température du café à l'instant $n$, avec $T_n$ exprimé en degré Celsius et $n$ en minute.

On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques $n$ et $n+1$ par l'égalité : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - 18)$ où $k$ est une constante réelle (le coefficient de proportionnalité).

1. Au bout de la première minute la température du café est 67,6 degré Celsius. En déduire $k = -0,2$.
2. Montrer que la suite $(T_n)$ est arithmético-géométrique.
3. En déduire $T_n$ en fonction de $n$.
4. Est-ce que la suite converge ? Interpréter avec la situation.