Modèle d'évolution continu, équations différentielles, primitives

Table des Matières

Modèle d'évolution continu, équations différentielles, primitives

I. Introduction

Activité 1

La loi de refroidissement d'Isaac Newton (anglais 1642-1727) stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
On rappelle que dans le cas discret, entre deux minutes consécutives n et $n+1$, la température T_n, exprimée en degré Celsius, d'un café vérifiait :

$$\frac{T_{n+1}-T_n}{n+1-n} = T_{n+1}-T_n = -0,2(T_n - 18)$$

Dans le cas continu (le temps x est exprimé en minute et décrit cette fois une variable continue), entre deux temps x et x', tels que $x < x'$, on a :

$$\frac{T(x')-T(x)}{x'-x} = -0,2(T(x)-18)$$

Généralement, la variation $T(x')-T(x)$ est notée $\Delta T(x)$.
Pour une variation infinitésimale (très petite, $t'-t$ proche de 0) du temps, avec la fonction T dérivable sur l'intervalle d'étude, ici $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$T'(x) = -0,2(T(x)-18) \Longleftrightarrow T'(x) = -0,2T(x)+3,6 \qquad (1)$$

Cette équation est appelée *équation différentielle d'ordre 1*
Soit la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} [0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 18+62e^{-0,2x} \end{array}$$

1. On rappelle que la température du café au début de l'expérience est de 80 degré Celsius. Vérifier que la fonction f vérifie la condition initiale $f(0)=80$.

2. Montrer que la fonction est solution du problème, c'est à dire qu'elle vérifie l'équation différentielle (1).

Définition

Une équation différentielle est une équation dont les inconnues sont des fonctions, ici d'une variable x ou t.
En particulier, une équation différentielle qui lie une fonction f et sa dérivée première f' est dite d'ordre 1, une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant est de la forme :

$$y' = ay+b$$

où a et b sont deux réels.
L'équation homogène associée est

$$y' = ay$$

✒ **Exemple**

En reprenant l'activité, l'équation différentielle d'ordre 1

$$T'(x) = -0,2(T(x) - 18)$$

a pour inconnue une fonction T définie sur $[0\,;\,+\infty]$, une condition initiale, $T(0) = 80$, définie plus précisément la fonction inconnue.
On a vu que la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{lcl} [0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 18 + 62e^{-0,2x} \end{array}$$

est solution de l'équation différentielle.

☞**Exercice 1**

1. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' = y$
2. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' = 2$
3. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' = 2x$
4. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' = 3x^2$

II. Primitives

II. A. Définition

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Une fonction F est une primitive de f sur I si $F' = f$ sur I.

Remarque

- Chercher une primitive F de f revient à résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$.
- Pour trouver une primitive d'une fonction sur un intervalle I usuelle f il suffit de lire le tableau de dérivée de droite à gauche en prenant soin de vérifier les coefficients, aussi de connaître les opérations de dérivées, compléter le tableau de droite :

Fonction f	Fonction dérivée f'
k (k est un paramètre réel)	0
x	1
$mx+p$	m
x^n ($n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$)	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$)	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x

Une fonction primitive F de f	Fonction dérivée f
	0
	1
	m
	x^n
	$\frac{1}{x^n}$ ($n \geqslant 2$)
	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
	e^x

- De la même manière que pour les fonctions de référence, on détermine une primitive d'une fonction f par lecture contraire du tableau de dérivation des formes composées.
u est une fonction continue et définie sur un intervalle I :

Fonction f	Fonction dérivée f'
u^2	$2u'u$
e^u	$u'e^u$

Propriété

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et F et G une primitive respective de ces fonctions. λ est un nombre réel.

- Une primitive de $f+g$ est $F+G$
- Une primitive de λf est λF

Démonstration 1

évidente, laissée en exercice

Exercice 2

1. Avec des fonctions usuelles :
   (a) Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$.
   (b) Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
   (c) Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$.
   (d) Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x+5x$.
2. Avec des fonctions composées :
   (a) Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x(e^x+1)$.
   (b) Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.
   (c) Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4e^{2x+1}$.

II. B. Existence et unicité

Propriété

Existence
Pour qu'une fonction f définie sur I admette une primitive, il suffit qu'elle soit continue sur I. (cette condition n'est pas nécessaire, les fonctions continues par morceaux admettent des primitives)

Démonstration 2

admise

Propriété

Unicité
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et on note F une primitive de f sur I.
Si G est une primitive de f sur I alors

$$\forall x\in I, G(x)=F(x)+C$$

où C est une constante réelle.

Démonstration 3

1. Soit F est une primitive de f sur un intervalle I et la fonction G définie sur I par $G(x)=F(x)+C$ (où C est une constante réelle), montrer que G est une primitive de f sur I.
2. Étude de la réciproque : Soit F et G deux primitives de f sur I. Calculer $(F-G)'$, que peut-on dire de la fonction $F-G$?

Remarque

Lorsqu'une primitive d'une fonction f existe, il n'y a pas unicité de cette primitive.

Corollaire

Condition initiale pour l'unicité d'une primitive
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et x_0 un nombre de I et y_0 un nombre réel.
Il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0)=y_0$.
Le couple $(x_0;y_0)$ est appelé condition initiale.

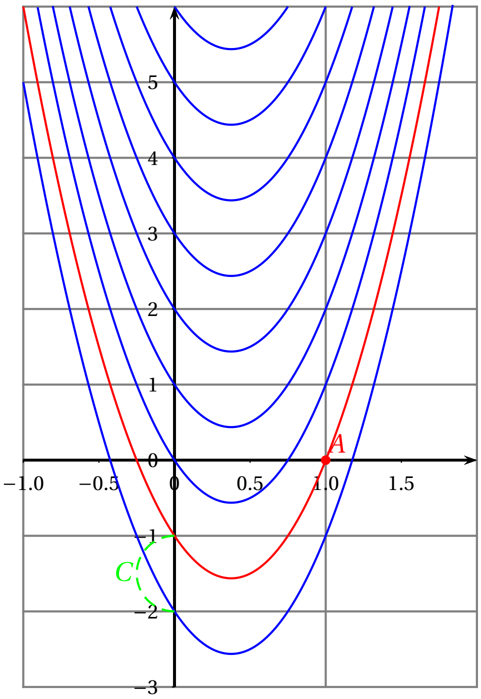
☞**Démonstration 4**

Soit F une primitive de f sur I.
Si G est une autre primitive de f alors il existe une constante réelle C telle que $F(x) = G(x) + C$.
Déterminer **la** valeur C qui vérifie la condition initiale (la constante étant unique, la primitive F qui vérifie la condition initiale est unique).

☞**Exercice 3**

Trouver la primitive de la fonction f de condition initiale $(1;0)$, telle que $f(x) = 8x - 3$.
interprétation graphique :

Sur le graphique suivant, les courbes représentent des primitives de la fonction f de l'exemple, une seule passe par le point A de coordonnées $(1;0)$.



III. Solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' + ay = b$

III. A. Résolution de l'équation homogène $y' = ay$

Propriété

Soit l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel non nul.
Les solutions de cette équation sont les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{ax} \end{array}$$

où k est une constante réelle.

☞**Démonstration 5**

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$
2. réciproquement, soit g une autre solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Posons $h(x) = e^{ax}g(x)$.
   (a) Montrer que $h'(x) = e^{ax}(g'(x) + ag(x))$
   (b) En déduire que $h'(x) = 0$.
   (c) Que peut-on en déduire pour la fonction h ? En déduire une expression de g.

☞**Exercice 4**

Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,2y = 0$.

III. B. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

✒ Propriété

L'équation différentielle $y' = ay + b$, avec a non nul, admet une solution particulière, la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-b}{a}$.

☞**Démonstration 6**

évidente

✒ Propriété

L'équation différentielle $y' = ay + b$, avec a non nul, admet pour solution les fonctions f définies par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{ax} - \dfrac{b}{a} \end{array}$$

où k est un réel constant.

☞**Démonstration 7**

1. Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.
2. Réciproquement, soit la fonction g définie par $g(x) = f(x) + \dfrac{b}{a}$ où f vérifie l'équation différentielle $y' = ay + b$.
   (a) Montrer que g est solution de l'équation différentielle homogène $y' = ay$.
   (b) En déduire la forme de l'expression de la fonction g, puis celle de f.

☞**Exercice 5**

Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + 1$ en respectant les étapes suivantes :

1. Résoudre l'équation différentielle homogène $y' = ay$.
2. Déterminer une solution particulière constante de l'équation différentielle $y' = 3y + 1$.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y + 1$.

III. C. Unicité de solution

✒ Propriété

Condition initiale
Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec a réel non nul et le couple $(x_0; y_0)$ donné. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ telle que $f(x_0) = y_0$.

☞**Démonstration 8**

On a vu que les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont de la forme $f(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$.
Déterminer le réel k pour $f(x_0) = y_0$.

☞**Exercice 6**

Reprendre l'équation différentielle $y' = 3y + 1$ et déterminer la solution de cette équation vérifiant la condition initiale $(x_0 = 2\ ;\ y_0 = 1)$.