Calculs d'aires, intégrales

Table des Matières

∽❀ Calculs d'aires, intégrales ❀∽

Monte Carlo et volumes à compélter avec et définition d'une primitive à faire avant

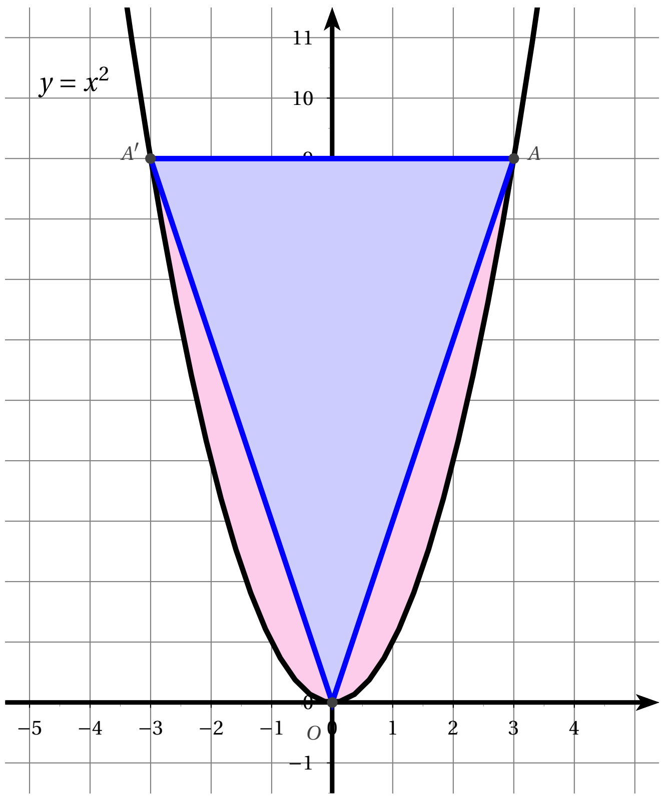
I. Introduction historique : quadratures

Une quadrature est une méthode qui consiste à trouver un carré qui a la même aire que celle d'une figure donnée, le carré se construisant à la règle et au compas (cette dernière règle induit la construction des nombres à la règle et au compas).
Les quadratures ont largement préoccupé les mathématiciennes et mathématiciens à travers les siècles.
La quadrature de la parabole a été résolue par Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.-C. 212 - av. J.-C). La quadrature de l'hyperbole a été partiellement résolue par Grégoire Saint-Vincent (belge 1584-1667). La quadrature la plus connue étant celle du cercle, impossible car le nombre pi n'est pas constructible à la règle et au compas.

I. A. Quadrature de la parabole : Archimède

☞Activité 1

Soit un repère orthonormé du plan $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ et la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$, les points A d'abscisse a de la parabole et A' d'abscisse $-a$ de la parabole $\mathscr{P}$. La propriété d'Archimède est la suivante : l'aire $\mathscr{A}$ au-dessus de la parabole $\mathscr{P}$ et sous le segment $[AA']$ dans l'intervalle $[-a\,;\ a]$ vaut quatre tiers de l'aire du triangle bleu $AA'O$, autrement dit l'aire de la partie rose vaut le tiers de l'aire du triangle bleu $AA'O$.



Archimède a approché l'aire par itérations dichotomiques :

1. L'aire $\mathscr{A}$ est approchée à cette étape par l'aire du triangle OAA' et l'aire des deux triangles roses : l'aire d'un triangle rose se détermine en le découpant en deux triangles tels qu'un des côtés est parallèle à l'axe des ordonnées. Montrer que l'aire du triangle bleu et des deux triangles roses est $\frac{5}{4}a^3$.

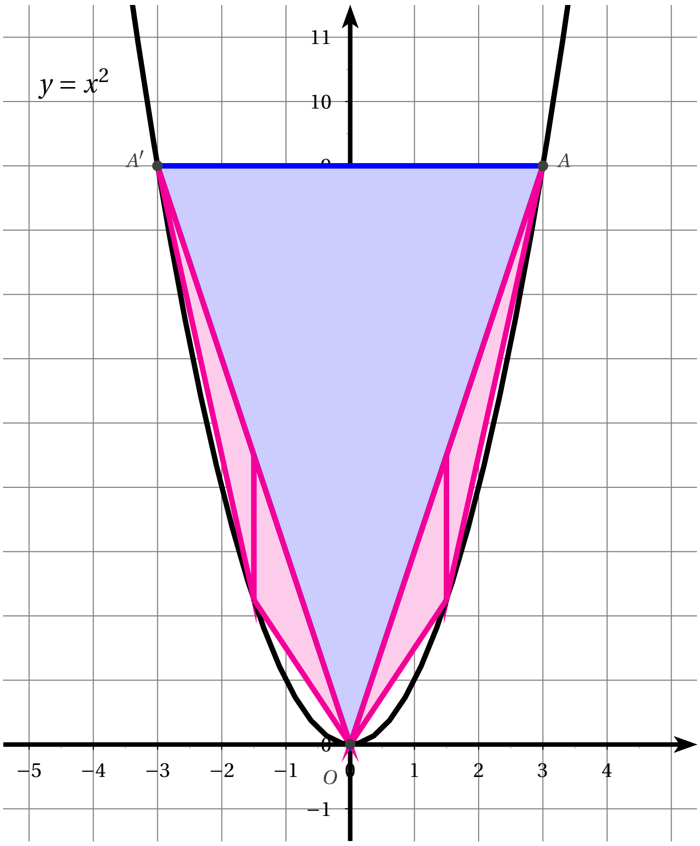
2. Le calcul de l'aire d'un des deux triangles rose quelconque sous un segment $[AB]$ de la parabole permet de généraliser l'itération précédente (le point C a pour abscisse $\frac{a+b}{2}$).

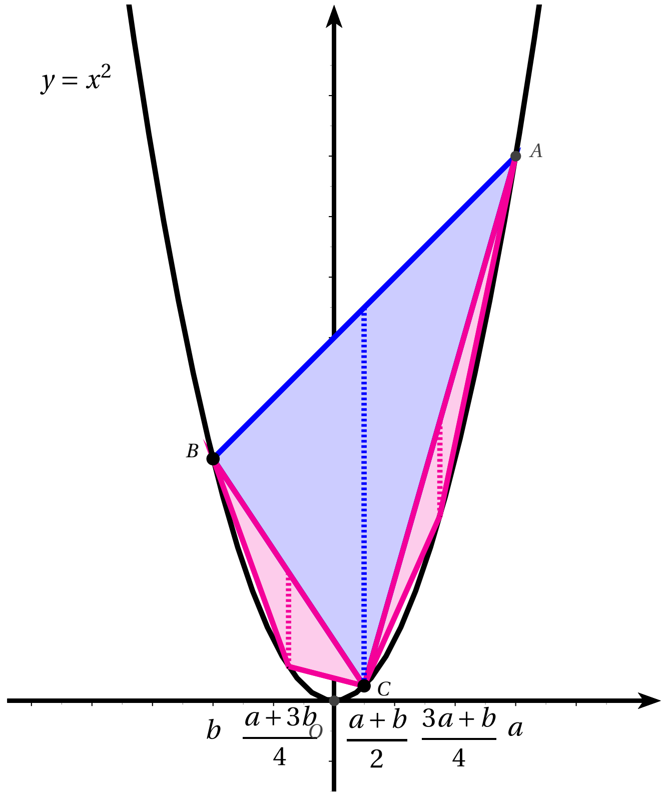
   Montrer que

   (a) L'aire du triangle ABC est $\frac{(a-b)^3}{8}$.

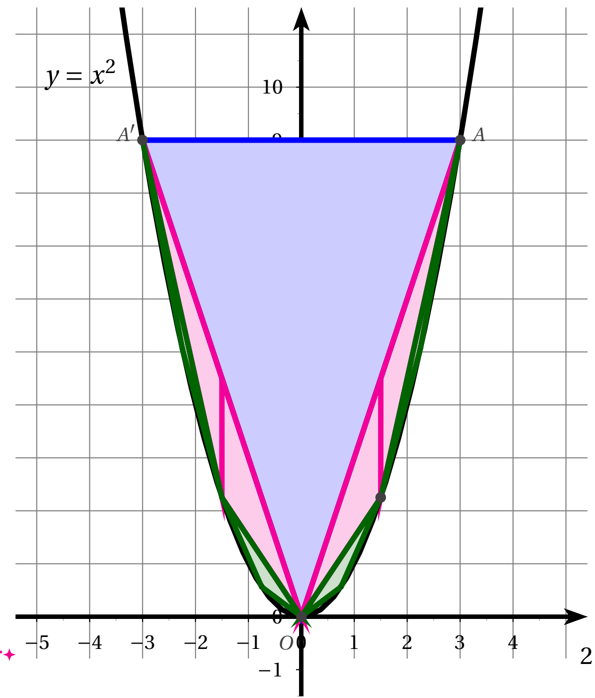
   (b) L'aire d'un des deux triangles roses est $\frac{(a-b)^3}{64}$.

   (c) En déduire que l'aire rose vaut un quart de l'aire du triangle bleu.





À l'aide des mêmes découpages, mis en pointillés sur la figure, on détermine les aires des triangles par itérations successives :



3. On note u_0 l'aire du triangle initiale égale à a^3, u_n l'aire des 2^n triangles à la n^{ième} itération, on a $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$.

   (a) Montrer que $u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{4}{3}a^3\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 + u_1 + ... + u_n$.

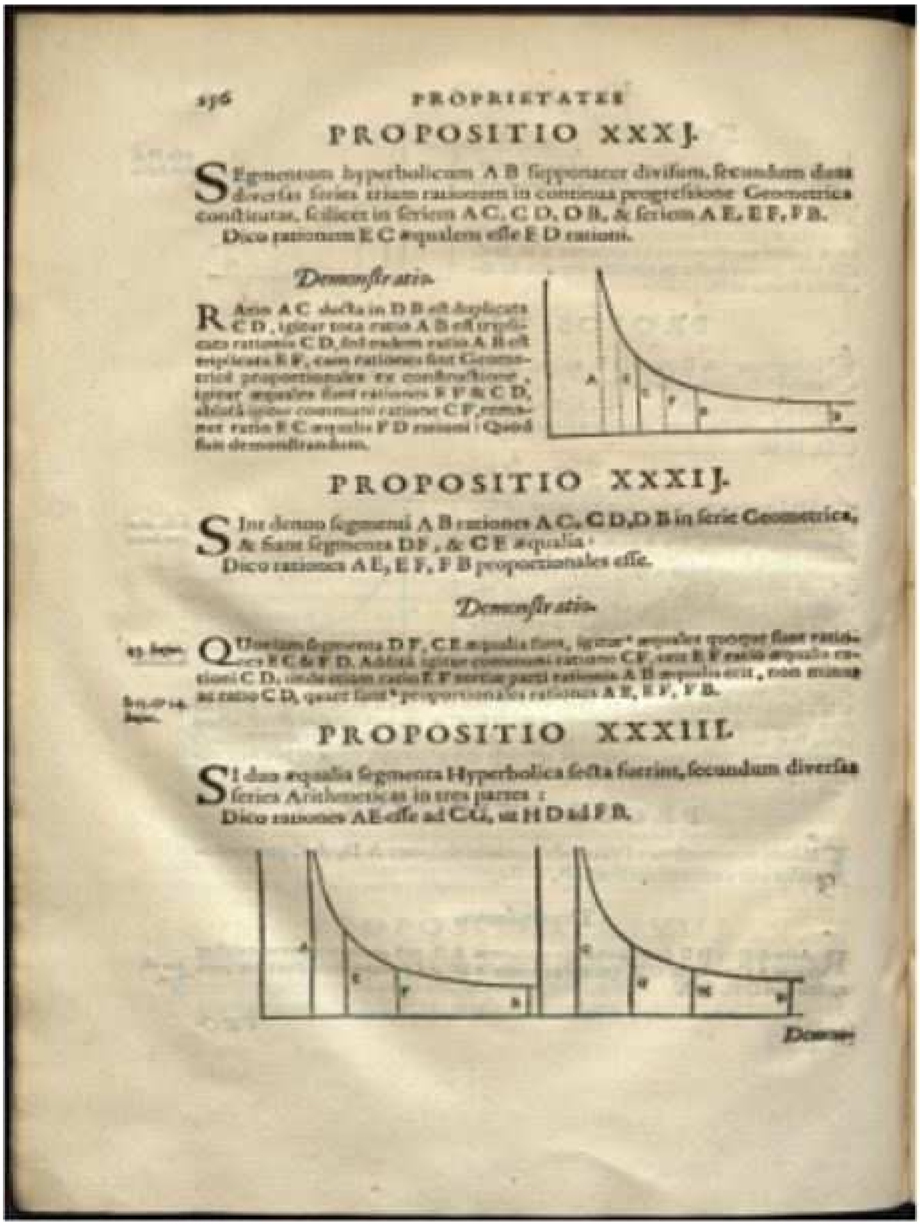
N'ayant pas la notion de limite, Archimède justifie que l'aire $\mathscr{A}$ est $\dfrac{4}{3}a^3$ par la méthode d'exhaustion qui consiste à faire un double raisonnement par l'absurde, il démontre que $\mathscr{A}$ ne peut être inférieure à $\dfrac{4}{3}a^3$ puis que $\mathscr{A}$ ne peut être supérieure à $\dfrac{4}{3}a^3$.

I. B. Quadrature de l'hyperbole : Grégoire Saint-Vincent

☞Activité 2

Grégoire Saint-Vincent (belge 1584-1667), jésuite, mathématicien, géomètre, souhaite faire la quadrature de l'hyperbole. Il montre que les aires découpées entre l'hyperbole et l'axe des abscisses sont égales si et seulement si les abscisses du découpage sont en progression géométrique et si, a, b et c sont en progression géométrique, les aires sous l'hyperbole de base $[1,a]$, $[1,b]$, $[1,c]$ sont en progression arithmétique.

Extrait des travaux de Grégoire Saint-Vincent :


156 PROPRIETATES

PROPOSITIO XXXI.

Segmentum hyperbolicum AB supponatur divisum, secundum duas diversas series etiam rationum in continua progressione Geometrica constitutas, scilicet in seriem AC, CD, DB, & seriem AE, EF, FB.
Dico rationem EC aequalem esse FD rationi.

Demonstratio.

PROPOSITIO XXXII.

Sint denuo segmenti AB rationes AC, CD, DB in serie Geometrica, & sint segmenta DF, & CE aequalia.
Dico rationes AE, EF, FB proportionales esse.

Demonstratio.

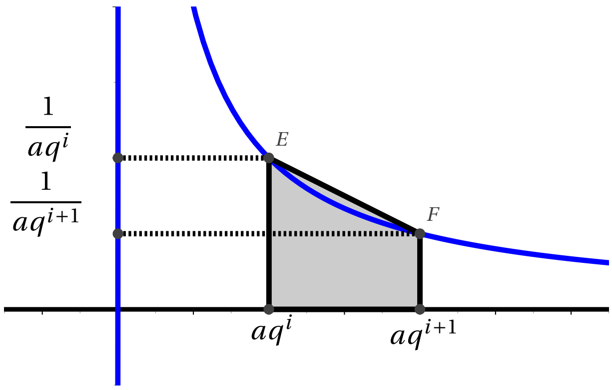
PROPOSITIO XXXIII.

Si duo aequalia segmenta Hyperbolica secta fuerint, secundum diversas series Arithmeticas in tres partes :
Dico rationes AE esse ad CG, ut HD ad FB.

Soit un repère orthonormé du plan $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ et l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y=\dfrac{1}{x}$.

Soit un réel q tel que $q>1$.

On construit n trapèzes $\mathscr{T}_i$ sur les intervalles $[aq^i\,;\,aq^(i+1)]$ pour i entier naturel variant de 0 à $n-1$ dont 2 sommets E et F sont des points de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'abscisse respectif aq^i et aq^{i+1} :



1. Montrer que l'aire d'un trapèze $\mathscr{T}_i$ est constante égale à $\dfrac{q^2-1}{2q}$ (elle ne dépend pas de i).

2. Montrer que l'aire d'un rectangle $\mathscr{R}_i$ délimité par les points de coordonnées $\left(aq^i\ ;\ 0\right)$, $\left(aq^{i+1}\ ;\ 0\right)$, $\left(aq^{i+1}\ ;\ \dfrac{1}{aq^{i+1}}\right)$ et $\left(aq^i\ ;\ \dfrac{1}{aq^{i+1}}\right)$ est constante égale à $\dfrac{q-1}{q}$.

Remarque

Pour tout entier naturel i, l'aire sous l'hyperbole sur l'intervalle $\left[aq^i\ ; aq^{i+1}\right]$ est comprise entre $\dfrac{q-1}{q}$ et $\dfrac{q^2-1}{2q}$.

II. Calcul intégral

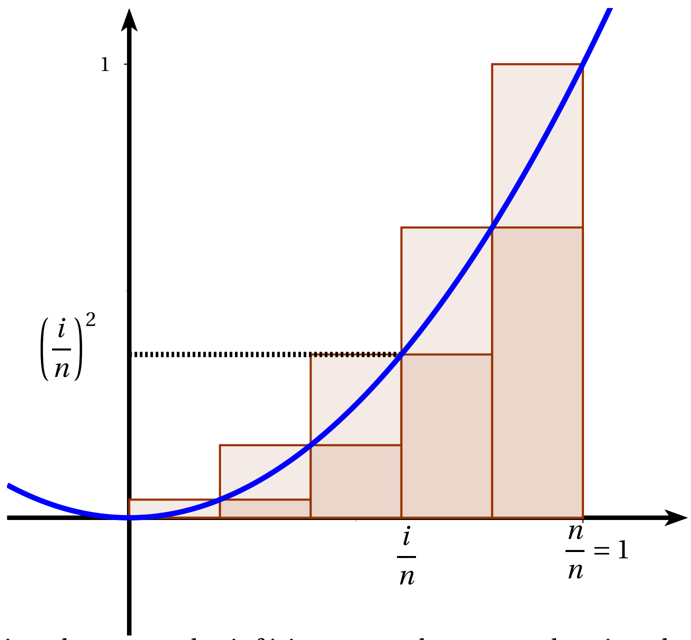
II. A. Méthode des rectangles

Activité 3

Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Le but de l'activité est de déterminer l'aire sous la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ (aire délimitée par l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$, l'axe des abscisses d'équation $y = 0$, la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $x = 1$).

On admet la somme des carrés : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1}{3}n^3 + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{6}n$. On note n le nombre de rectangles, n est un entier naturel non nul.



On note u_n la somme des aires des rectangles inférieurs et v_n la somme des aires des rectangles supérieurs.

1. Montrer que $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)$. En déduire que $u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$. Étudier les variations de la suite (u_n) et calculer la limite de la suite (u_n).
2. Montrer que $v_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$. En déduire que $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$. Étudier les variations de la suite (u_n) et calculer la limite de la suite (v_n).
3. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant v_n$. Que vaut $\mathscr{A}$?
4. Déterminer un algorithme qui permet de déterminer la première valeur de n pour laquelle $v_n - u_n < 10^{-3}$.

Remarque

Lorsque n est suffisamment grand, les n rectangles ont une largeur infiniment petite. Ce principe est suggéré dans la notation de Gottfried Wilhelm Leibniz (allemand 1646-1716), $\mathscr{A} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$ représentant la largeur infinitésimale d'un rectangle et x^2 la longueur associée, le symbole intégrale représente une somme d'aires de ces rectangles.

II. B. Intégrale

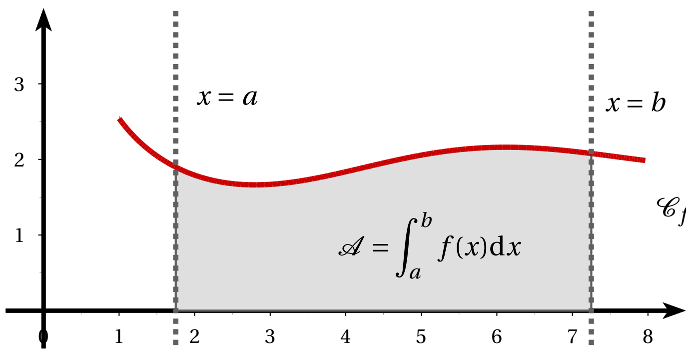
II. B. 1. Intégrale d'une fonction positive et continue

Définition

Soit une fonction f définie et positive sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$.
L'aire $\mathscr{A}$ du domaine défini par :

- $a \leqslant x \leqslant b$
- $0 \leqslant y \leqslant f(x)$

L'aire $\mathscr{A}$ est notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Remarques

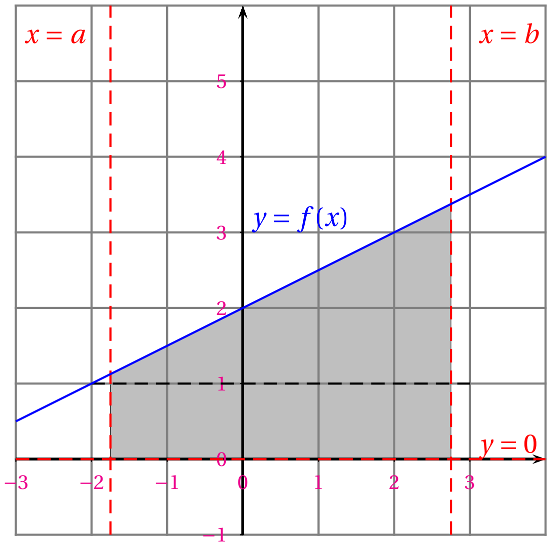
Remarques :

- Dans la notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ la lettre x est muette, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre par exemple t : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

☞**Exercice 1**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5x + 2$. Soit a et b deux nombres réels, on souhaite exprimer en fonction de a et b $(a < b)$ l'aire délimitée par les droites $x = a$ et $x = b$, la droite $y = 0$ et la courbe de la fonction f :

- $a \leqslant x \leqslant b$
- $0 \leqslant y \leqslant f(x)$



1. Sur quel intervalle f est continue et positive ?
2. La figure grisée est un trapèze, calculer $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.
3. Calculer l'aire $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.
4. Calculer l'aire $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

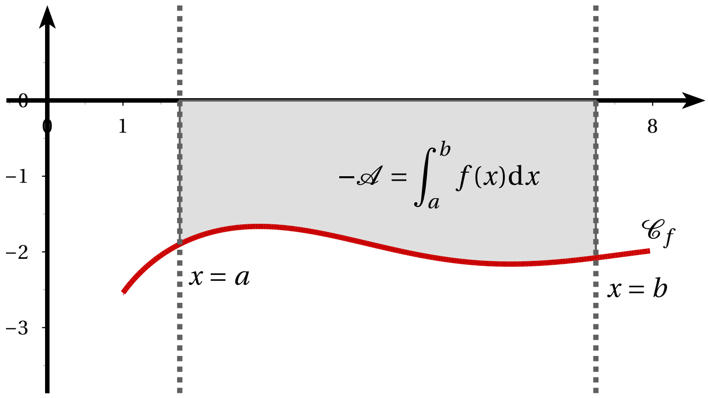
II. B. 2. Intégrale d'une fonction négative et continue

Définition

Soit f une fonction continue et négative sur $[a\,;\,b]$. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine défini par :

- $a \leqslant x \leqslant b$
- $f(x) \leqslant y \leqslant 0$

alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$.

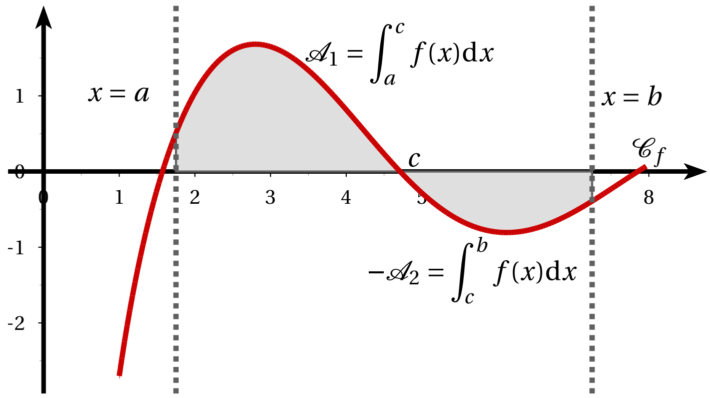


II. B. 3. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Sur $[a\,;\,b]$, on note $\mathscr{A}_1$ la somme des aires où $f(x)$ est positive et $\mathscr{A}_2$ la somme des aires où $f(x)$ est négative.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2$.



Remarque

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

II. B. 4. Propriétés

Théorème

linéarité de l'intégrale

Soit deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, λ un nombre réel non nul.

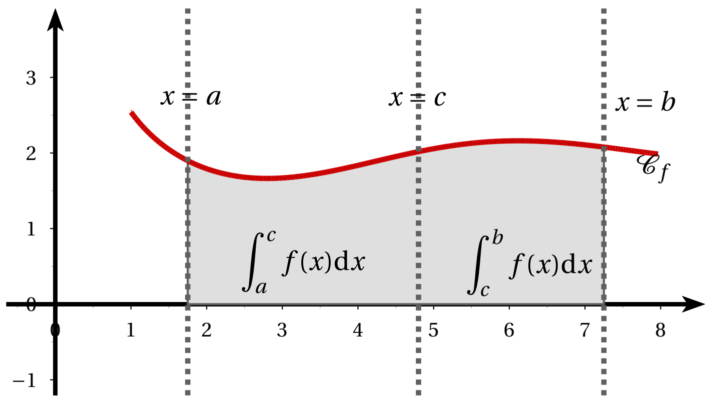
- $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Théorème

relation de Chasles

Soit deux fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, c un nombre réel de $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Théorème

positivité de l'intégrale

Soit une fonction f définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, telle que pour tout x de l'intervalle $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$. On a

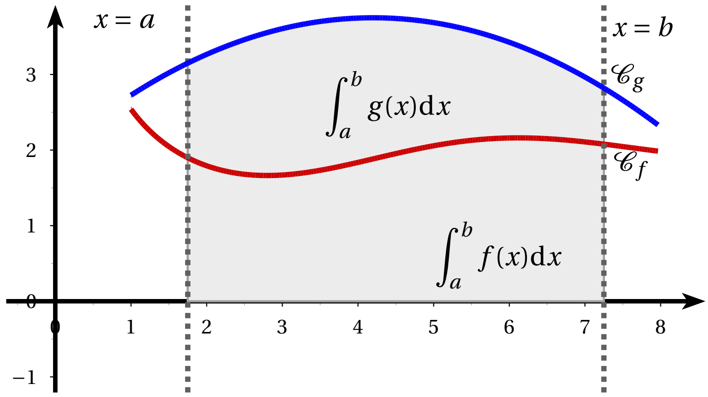
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Corollaire

comparaison de deux intégrales

Soit deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle $[a;b]$, telles que pour tout x de $[a;b]$, $g(x) \geqslant f(x)$. On a

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



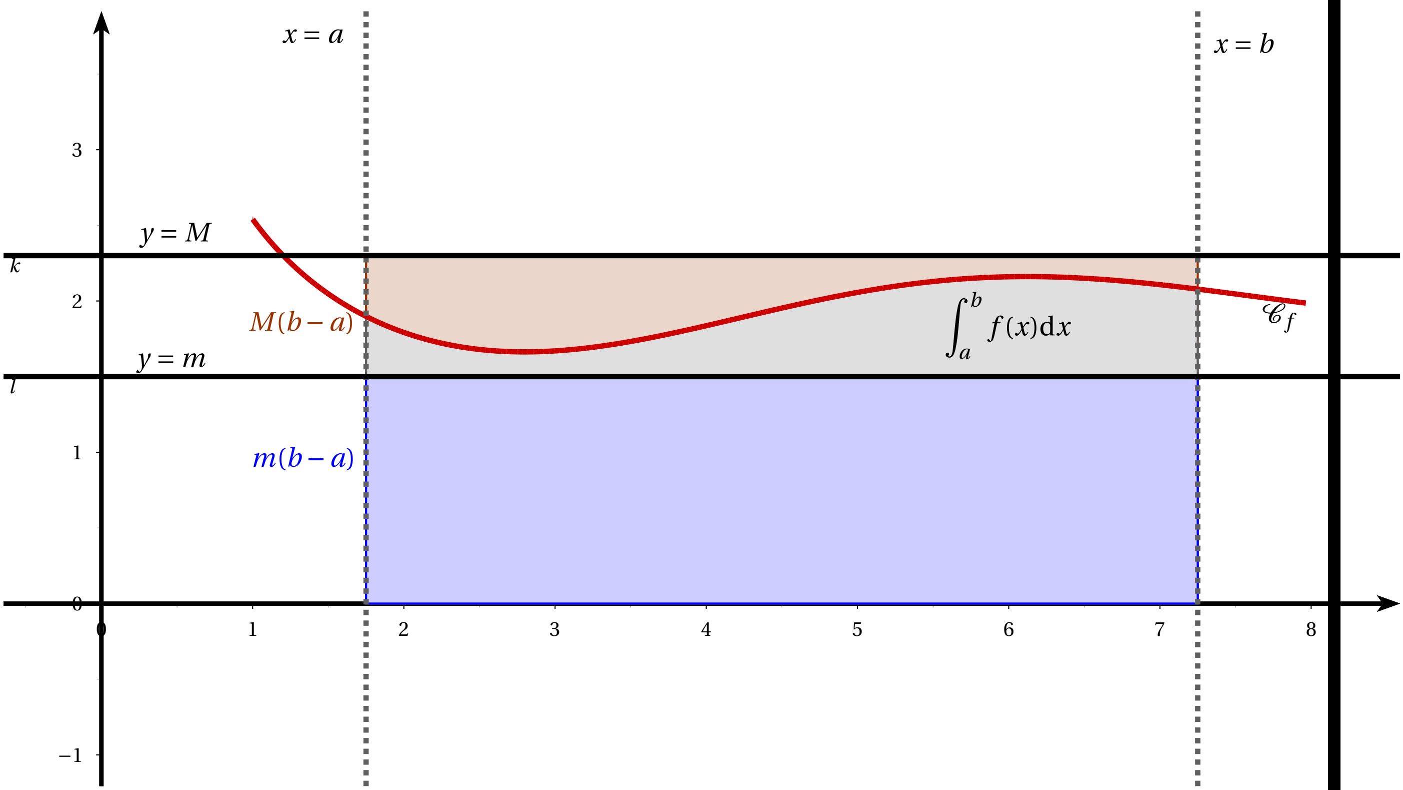
Démonstration 1

On compare $g(x) - f(x)$ à 0 et on utilise le théorème de positivité ainsi que la linéarité.

Corollaire

inégalité de la moyenne

Si $\forall x \in [a\,;\,b], m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.



Démonstration 2

cas d'une fonction positive, cas d'une fonction négative, cas général admis

Utiliser le corollaire précédent.

II. B. 5. Moyenne

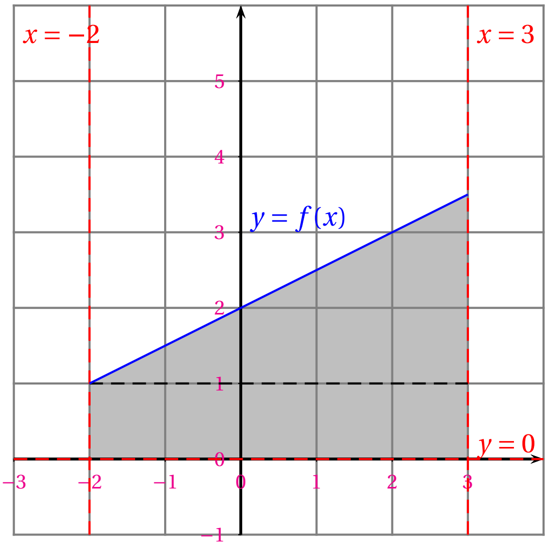
✒ Définition

Soit une fonction f continue définie sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

☞Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $[-2;3]$ par $f(x)=0,5x+2$. Calculer la valeur moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2;3]$ et interpréter graphiquement cette valeur.



II. C. Calcul d'une intégrale

Théorème

Soit une fonction f continue définie sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$.
La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F' = f$.

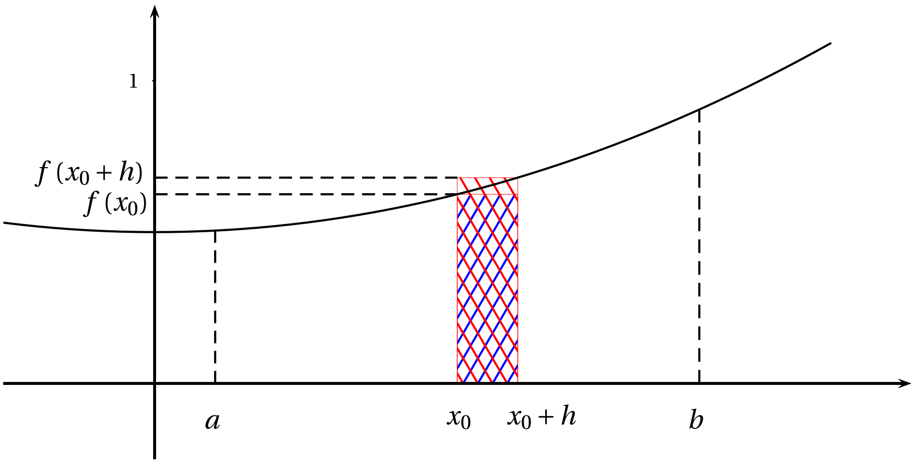
Remarque

Sur I, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,

- F est une primitive de f sur I,
- $F(a) = 0$

Démonstration 3

On admet que f est croissante sur I (le cas général est admis).
Soit $x_0 \in [a\,;\,b]$, montrons que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$:



1. Soit $h > 0$, en interprétant des aires, simplifier $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x$.
2. f est croissante ordonner $f(x_0)$, $f(x_0+h)$ et $f(t)$ pour $t \in [x_0\,;\,x_0+h]$, et en interprétant les aires, ordonner $f(x_0)\times h$, $f(x_0+h)\times h$ et $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$.
3. En déduire $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.
   De la même manière on admet que si $h < 0$, on a $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ et la dérivabilité de F en x_0.

Théorème

Soit une fonction f continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
$\forall a$ et $b \in I$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Démonstration 4

admise

☞**Exercice 3**

Calculer les intégrales suivantes et comparer avec les résultats obtenus précédemment :

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-1}^2 0,5x+2 \, \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-2}^3 0,5x+2 \, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^2 0,5x+2 \, \mathrm{d}x$