Coordonnées des vecteurs

Table des Matières

I. Coordonnées d'un vecteur **1**

II. Repère du plan par des vecteurs **2**

III. Calculs sur les coordonnées des vecteurs **2**

III. A Addition de deux vecteurs 2

III. B Multiplication par un nombre réel 4

IV. Coordonnées d'un vecteur à partir des coordonnées de deux points **5**

V. coordonnées du milieu d'un segment **6**

VI. Norme d'un vecteur **6**

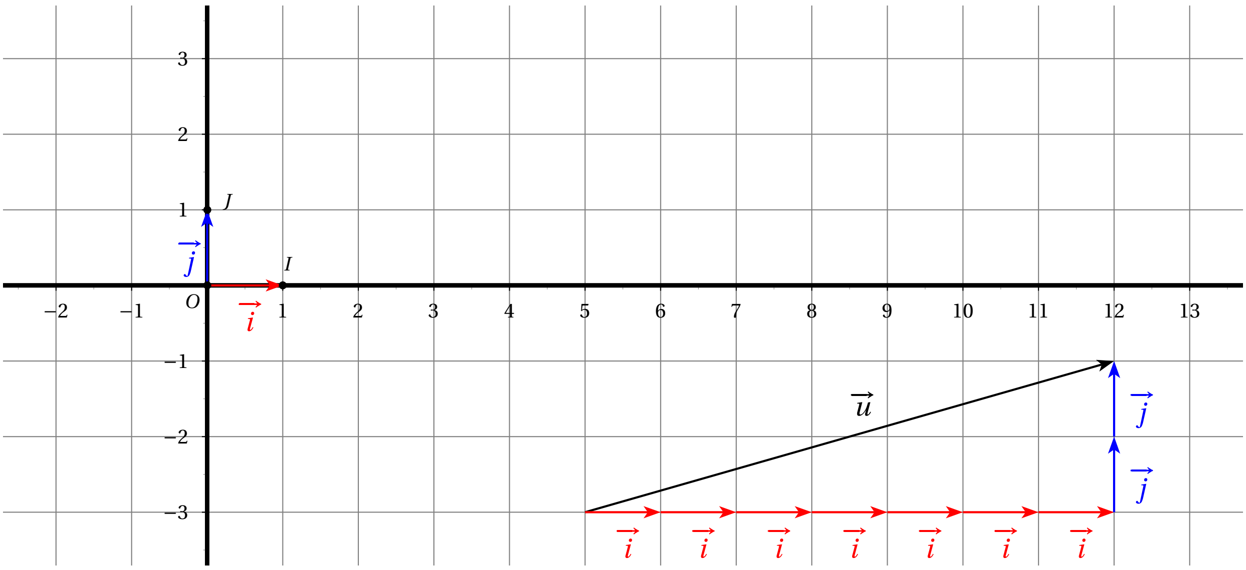
Coordonnées des vecteurs

I. Coordonnées d'un vecteur

Activité 1

Soit $(O\,;\,I\,;\,J)$ un repère du plan.

1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$
2. Donner les coordonnées du point M.
3. Décomposer le vecteurs $\overrightarrow{OM}$ en une somme des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Que remarquez-vous ?

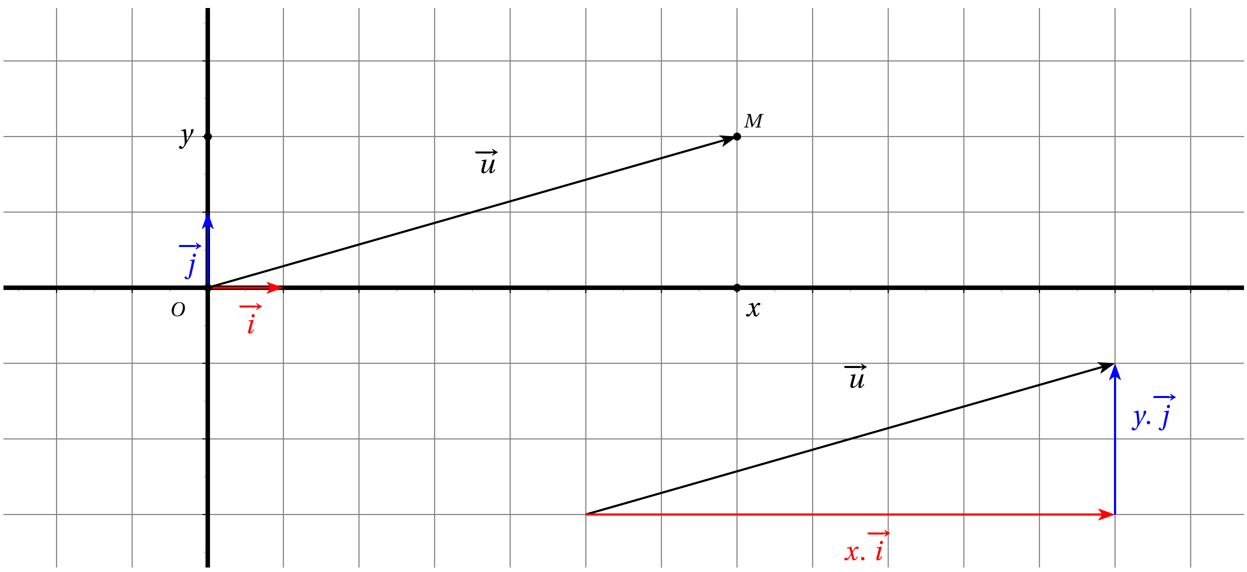


Définition

Soit $(O\,;\,I\,;\,J)$ un repère du plan et M un point de coordonnées $(x\,;\,y)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont celles du point M telles que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.

On note les coordonnées x, y du vecteur par un couple vertical : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On a ainsi $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}$.



Remarque

Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

II. Repère du plan par des vecteurs

Définition

Dorénavant, Le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ sera représenté par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, on le notera $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$, O étant l'origine du repère et $\left(\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ la base du repère.

- Si les directions des vecteurs de la base $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonales, le repère est dit orthogonal.
- Si les longueurs des vecteurs de la base $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont de même longueur, le repère est dit normé.
- Si le repère est orthogonal et normé, le repère est dit orthonormé.

III. Calculs sur les coordonnées des vecteurs

III. A. Addition de deux vecteurs

Théorème

Soient $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

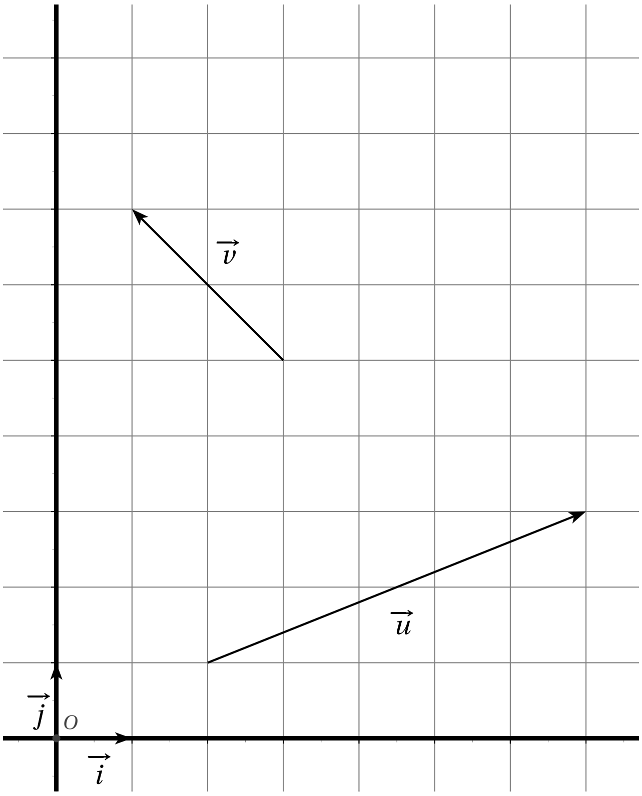
$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

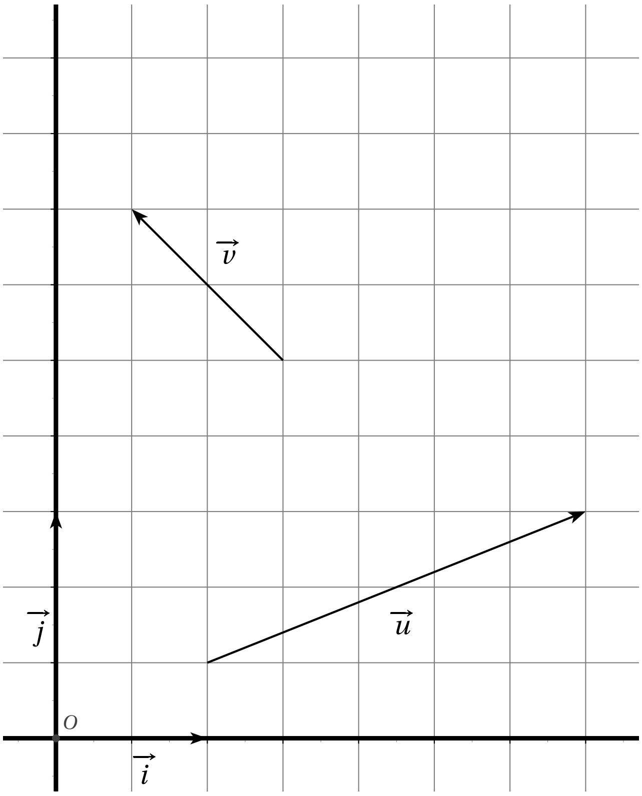
Démonstration 1

1. $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}$.
   De la même manière écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ comme somme des vecteurs de la base du repère.
2. En déduire $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ par une somme des vecteurs de la base du repère, puis les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

☞**Exercice 1**

1. Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé.
   (a) Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$, en déduire les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
   (b) Construire le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ comme décomposition en somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthogonal.
   (a) Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$, en déduire les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
   (b) Construire le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ comme décomposition en somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



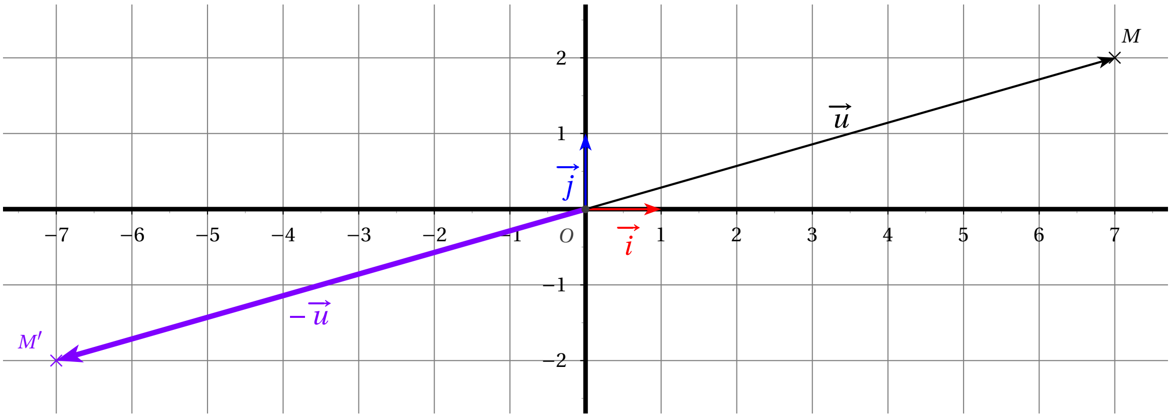


Propriété

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.

Pour tout point M du plan distinct du point O, $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$.
Ainsi on a $\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{OM}$.
Si les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MO}$ sont $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.



Exercice 2

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan et $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $-\vec{v}$.
3. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}-\vec{v}$.

III. B. Multiplication par un nombre réel

Théorème

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un nombre réel.

Le vecteur $k.\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

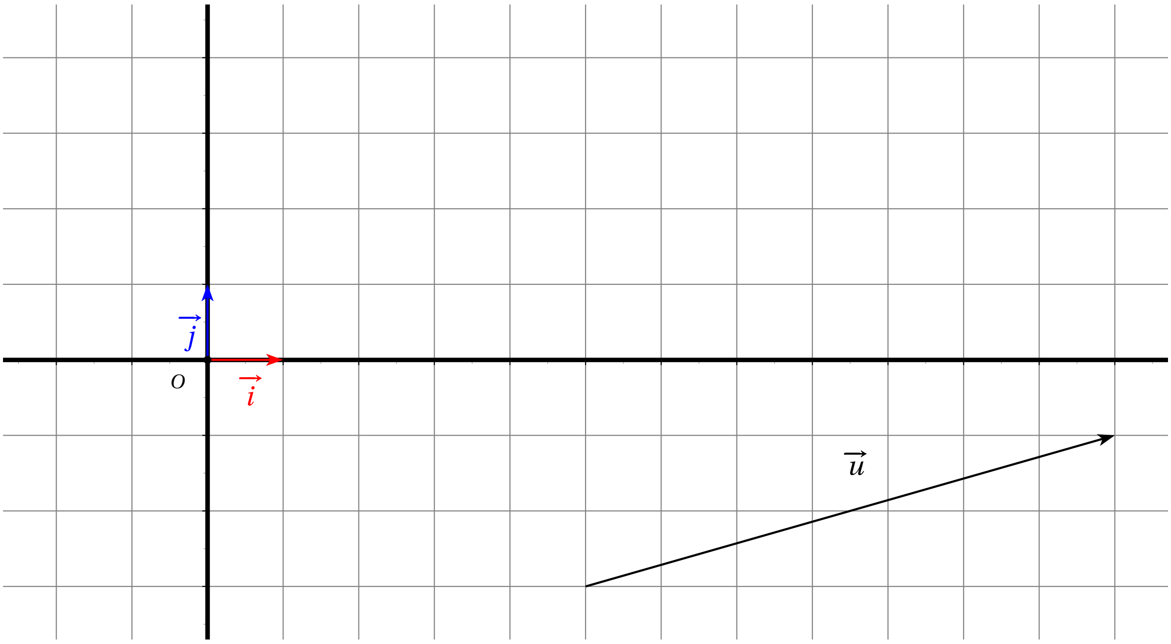
Démonstration 2

Laissée en exercice (on pourra reprendre l'idée de la démonstration précédente).

Exercice 3

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé.

1. Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs :
   (a) $-2.\vec{u}$
   (b) $0,5.\vec{u}$.
   (c) Construire ces deux derniers vecteurs.



IV. Coordonnées d'un vecteur à partir des coordonnées de deux points

Théorème

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

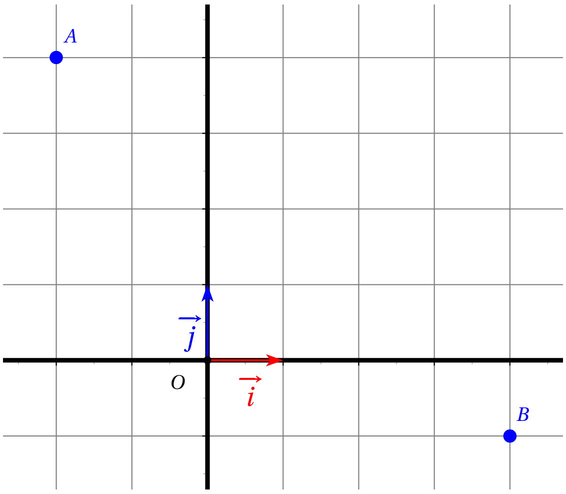
Démonstration 3

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. En utilisant le relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
3. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 4

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Par lecture graphique, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis celles des points A et B, puis vérifier les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec la formule du théorème précédent.



Exercice 5

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Soit $A(-1\,;\,2)$, $B(3\,;\,-1)$ et $C(2\,;\,4)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme (faire un figure pour vérifier).

V. coordonnées du milieu d'un segment

On a vu dans le chapitre translations et vecteurs des caractérisations vectorielles du milieu I d'un segment $[AB]$:

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{BI} \iff \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$
- $2.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

Théorème

Soit $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Le point I milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Démonstration 4

Laissée en exercice. (on pourra utiliser les coordonnées $(x_I\ ;\ y_I)$ du point I dans la relation $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$)

Exercice 6

Soit $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives $(-1\ ;\ 5)$ et $(3\ ;\ 4)$.
Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
Vérifier vos calculs avec une figure.

VI. Norme d'un vecteur

Activité 2

Soit $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
On a vu que la longueur d'un vecteur est appelé norme du vecteur, notée $\|u\|$.

1. Construire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la longueur OM soit la norme $\|\overrightarrow{OM}\|$.

Théorème

Soit $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

$\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

.

✒ **Remarque**

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

.

✒ **Théorème**

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient A et B deux points du plan de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

.

✒ **Remarque**

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$.

☞**Exercice 7**

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives $(5\,;\,4)$, $(2\,;\,-3)$ et $(-5\,;\,0)$.

1. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   Faire une figure pour vérifier les résultats.

✒ **Propriétés**

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et k un nombre réel.

- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + |\overrightarrow{v}\|$. (inégalité triangulaire)
- $\|k.\overrightarrow{u}\| = |k|.\|\overrightarrow{u}\|$.

☞**Exercice 8**

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives $(3\,;\,-4)$, $(-2\,;\,1)$ et $(1\,;\,-1)$.

1. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$
2. Vérifier l'inégalité triangulaire.
3. L'homothétie de centre A et de rapport -2 transforme le triangle ABC en $AB'C'$.
   (a) Construire le triangle $AB'C'$.
   (b) Donner les coordonnées des points B' et C'.
   (c) Calculer $\|\overrightarrow{AB'}\|$, $\|\overrightarrow{AC'}\|$, $\|\overrightarrow{B'C'}\|$.