# Coordonnées des vecteurs

## Table des Matières

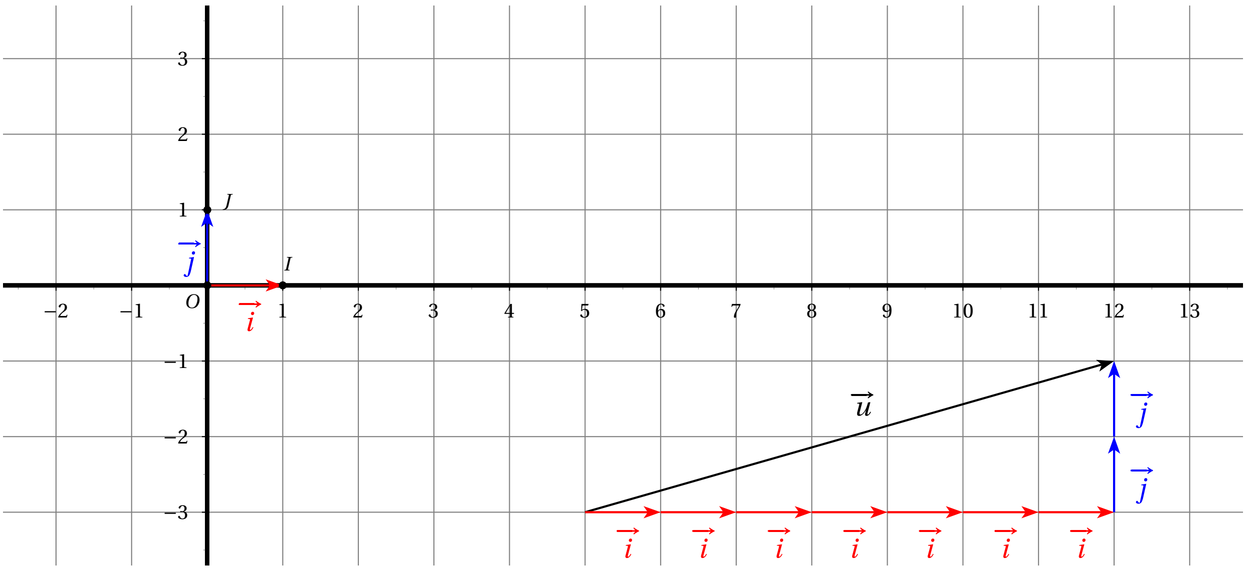
# Coordonnées des vecteurs

## I. Coordonnées d'un vecteur

**Activité 1**

Soit $(O\,;\,I\,;\,J)$ un repère du plan.

1. Placer le point $M$ tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OM}$
2. Donner les coordonnées du point $M$.
3. Décomposer le vecteurs $\overrightarrow{OM}$ en une somme des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Que remarquez-vous ?

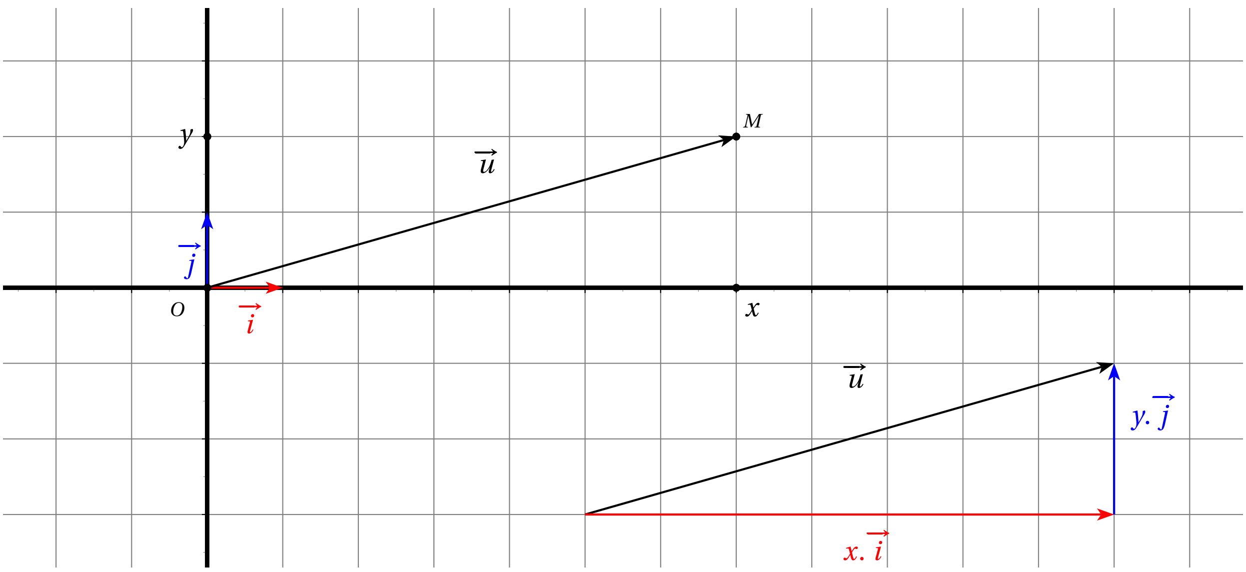



**Définition**

Soit $(O\,;\,I\,;\,J)$ un repère du plan et $M$ un point de coordonnées $(x\,;\,y)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont celles du point $M$ telles que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OM}$.

On note les coordonnées $x$, $y$ du vecteur par un couple vertical : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On a ainsi $\overrightarrow{u}=x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}$.



✒ **Remarque**

Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

✒ **Propriété**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

## II. Repère du plan par des vecteurs

✒ **Définition**

Dorénavant, Le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ sera représenté par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on le notera $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, $O$ étant l'origine du repère et $\left(\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ la base du repère.

- Si les directions des vecteurs de la base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonales, le repère est dit orthogonal.
- Si les longueurs des vecteurs de la base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même longueur, le repère est dit normé.
- Si le repère est orthogonal et normé, le repère est dit orthonormé.

## III. Calculs sur les coordonnées des vecteurs

### III. A. Addition de deux vecteurs

✒ **Théorème**

Soient $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

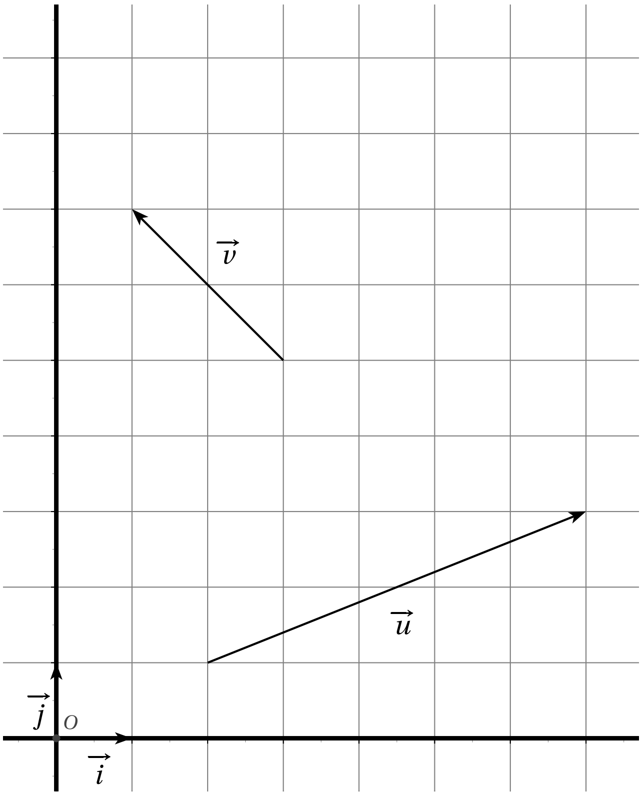
$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

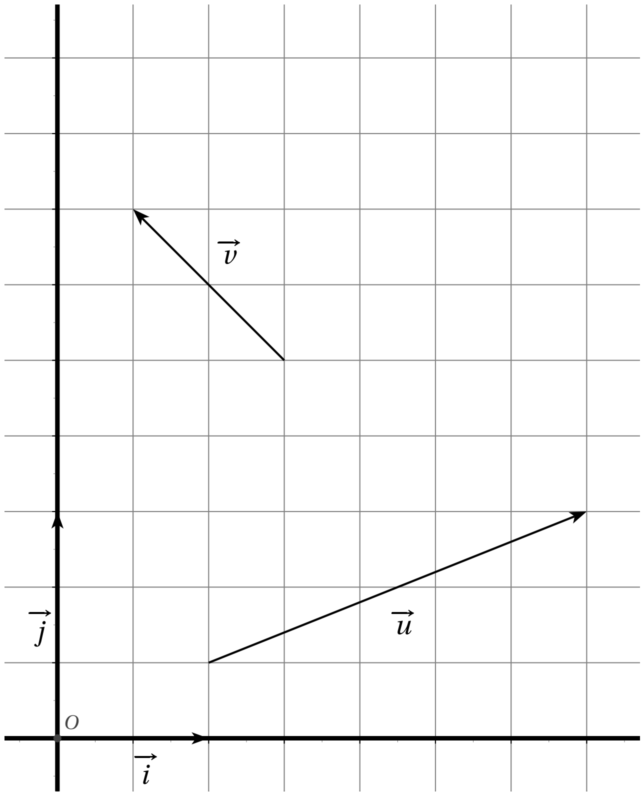
☞**Démonstration 1**

1. $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.
   De la même manière écrire les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ comme somme des vecteurs de la base du repère.
2. En déduire $\vec{u} + \vec{v}$ par une somme des vecteurs de la base du repère, puis les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

☞**Exercice 1**

1. Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé.
   (a) Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$, en déduire les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
   (b) Construire le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ comme décomposition en somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthogonal.
   (a) Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$, en déduire les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
   (b) Construire le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ comme décomposition en somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



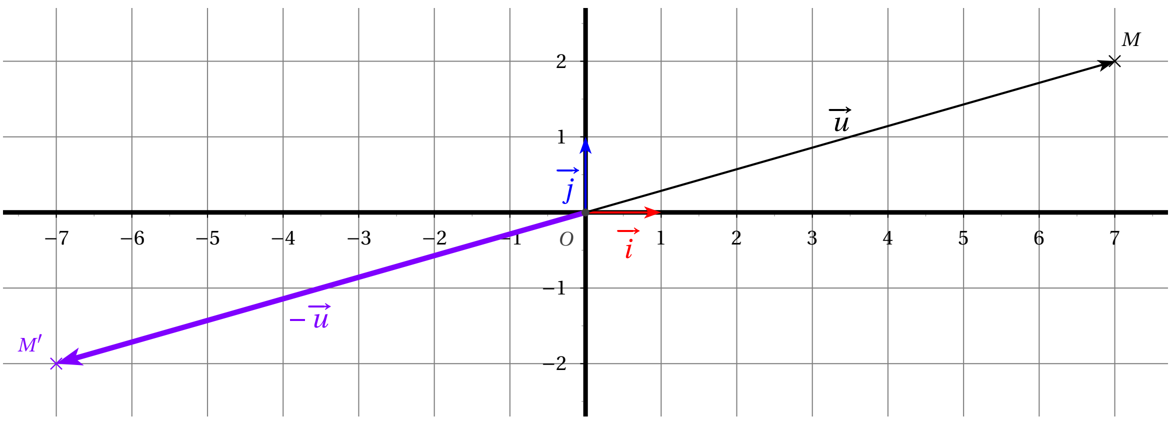

**✒ Propriété**

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.

Pour tout point $M$ du plan distinct du point $O$, $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$.
Ainsi on a $\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{OM}$.

Si les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MO}$ sont $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.



☞**Exercice 2**

Soit $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan et $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.

## III. B. Multiplication par un nombre réel

**Théorème**

Soit $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $k$ un nombre réel.

Le vecteur $k.\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

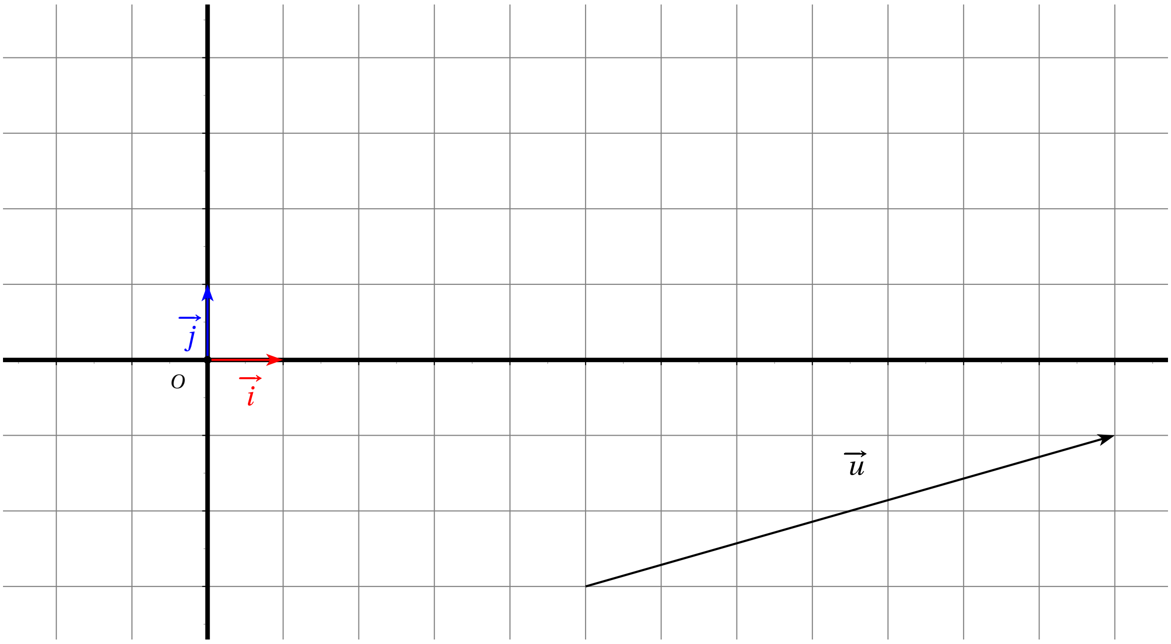
☞**Démonstration 2**

Laissée en exercice (on pourra reprendre l'idée de la démonstration précédente).

☞**Exercice 3**

Soit $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère orthonormé.

1. Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs :
   (a) $-2.\vec{u}$
   (b) $0,5.\vec{u}$.
   (c) Construire ces deux derniers vecteurs.



## IV. Coordonnées d'un vecteur à partir des coordonnées de deux points

**Théorème**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Soient $A$ et $B$ deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

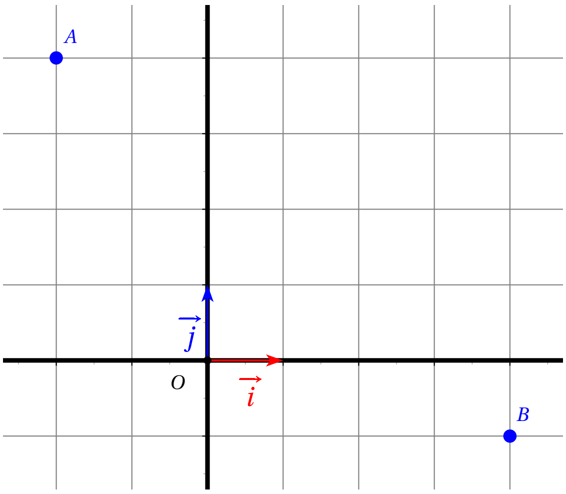
**Démonstration 3**

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2. En utilisant le relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
3. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**Exercice 4**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Par lecture graphique, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis celles des points $A$ et $B$, puis vérifier les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec la formule du théorème précédent.




**Exercice 5**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Soit $A(-1\,;\,2)$, $B(3\,;\,-1)$ et $C(2\,;\,4)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer les coordonnées du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme (faire un figure pour vérifier).

## V. coordonnées du milieu d'un segment

On a vu dans le chapitre translations et vecteurs des caractérisations vectorielles du milieu $I$ d'un segment $[AB]$ :

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{BI} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$
- $2.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

**Théorème**

Soit $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Le point $I$ milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

**Démonstration 4**

Laissée en exercice. (on pourra utiliser les coordonnées $(x_I ; y_I)$ du point $I$ dans la relation $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$)

**Exercice 6**

Soit $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient $A$ et $B$ deux points du plan de coordonnées respectives $\left(-1 ; \dfrac{1}{3}\right)$ et $\left(\dfrac{2}{5} ; \dfrac{4}{3}\right)$.
Déterminer les coordonnées du point $I$ milieu du segment $[AB]$.

## VI. Norme d'un vecteur

**Activité 2**

Soit $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
On a vu que la longueur d'un vecteur est appelé norme du vecteur, notée $\|u\|$.

1. Construire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la longueur $OM$ soit la norme $\|\overrightarrow{OM}\|$.

**Théorème**

Soit $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

$\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

.

✒ **Remarque**

$$\|u\|^2 = x^2 + y^2$$

.

✒ **Théorème**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient $A$ et $B$ deux points du plan de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

.

✒ **Remarque**

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$.

✒ **Propriétés**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $k$ un nombre réel.

- $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + |\vec{v}\|$. (inégalité triangulaire)
- $\|k.\vec{u}\| = |k|.\|\vec{u}\|$.

☞**Exercice 7**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan de coordonnées respectives $(3\,;\,-4)$, $(-2\,;\,1)$ et $(1\,;\,-1)$.

1. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$
2. Vérifier l'inégalité triangulaire.
3. L'homothétie de centre $A$ et de rapport $-2$ transforme le triangle $ABC$ en $AB'C'$.
   (a) Construire le triangle $AB'C'$.
   (b) Calculer $\|\overrightarrow{AB'}\|$, $\|\overrightarrow{AC'}\|$. En déduire $\|\overrightarrow{B'C'}\|$.

## VII. Colinéarité de deux vecteurs

**Définition**

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont ***colinéaires*** s'il existe un réel $k$ non nul tel que $\vec{u} = k.\vec{v}$.

**Exercice 8**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

1. Démontrer que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4,5\end{pmatrix}$

   Que peut-on conjecturer sur les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ?

2. Démontrer que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

**Théorème**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Deux vecteurs non nuls colinéaires ont leurs coordonnées proportionnelles

**Démonstration 5**

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe $k$ réel non nul tel que :
  $\begin{cases}x = kx'\\y = ky'\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}xy' = kx'y'\\x'y = kx'y'\end{cases} \Longrightarrow$
  $xy' = x'y \Longrightarrow xy' - xy = 0$.

- Réciproquement,
  Si $xy' = x'y$ alors :
  - Si $x' = 0$ alors $xy' = 0$, $\vec{v}$ est non nul donc $y' \neq 0$ donc $x = 0$.
    $\vec{u}$ est non nul donc $y \neq 0$.
    On pose $k = \dfrac{y}{y'}$ on a $\vec{u} = k\vec{v}$ $\left(i.e\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix}\right)$.
    On raisonne de la même manière si $x = 0$ ou $y = 0$ ou $y' = 0$.
  - Si $x$, $x'$, $y$ et $y'$ ne sont pas nuls.
    $xy' = x'y \Longleftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$. On pose alors $k = \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ et on a $\vec{u} = k\vec{v}$.

  Dans tous les cas, si $xy' = x'y$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**Définition**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

On appelle ***déterminant*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel $xy' - x'y$.

On note $\det\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y$

✒ **Propriété**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

☞**Démonstration 6**

le résultat a déjà été démontré dans la démonstration 4

✒ **Propriété**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points distincts du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si la droite $(AB)$ est parallèle à la droite $(CD)$.

☞**Démonstration 7**

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un réel $k$ non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ce qui équivaut à dire que les directions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les mêmes c'est à dire que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.
Réciproquement, si les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles alors en posant $k = \dfrac{AB}{CD}$ (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens) ou $k = -\dfrac{AB}{CD}$ (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont un sens opposé) on a $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

✒ **Corollaire**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Soient $A$, $B$ et $C$ trois points distincts du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$ si et seulement si les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

☞**Démonstration 8**

1. D'après le théorème précédent, que peut-on dire des droites $(AB)$ et $(BC)$.
2. Conclure.

☞**Exercice 9**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient les points $A$, $B$, $C$ et $D$ de coordonnées respectives $(3\,;\,4)$, $(6\,;\,2)$, $(-3,-2)$ et $(2\,;\,-2)$.

1. Calculer $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$, puis $\det\left(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$
2. Que peut-on conclure sur la nature du quadrilatère $ABCD$ ?

**☞Exercice 10**

Soit $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soit $A(-1;2)$, $B(3;1)$ et $C(5;0,5)$. (Faire une figure.)

1. Calculer $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AC}\right)$.
2. Que peut-on en déduire sur les points $A$, $B$ et $C$
3. Toujours en vous aidant de la colinéarité, déterminer l'ordonnée du point $M$ d'abscisse 2 de la droite $(AB)$.

**☞Exercice 11**

$ABCD$ est un carré, on construit les triangles équilatéraux direct $ABI$ et $CBJ$. (faire une figure.)

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les coordonnées des six points de la figure. Expliquer les calculs pour les points $I$ et $J$
2. En utilisant la colinéarité, montrer que les points $I$, $J$ et $D$ sont alignés.
3. Trouver au moins une autre démonstration pour prouver l'alignement des points $I$, $J$ et $D$.