Nombres et intervalles

Table des Matières

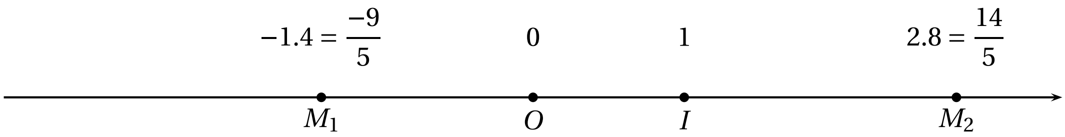
Nombres et intervalles

I. Définition et notation

Pour l'activité qui suit l'unité vaut 2 cm.
L'axe des abscisses a pour d'origine O d'abscisse 0, le point I a pour abscisse 1.

Activité 1

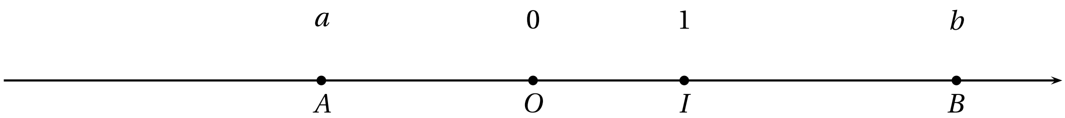
Soit les nombres $x_1 = -1,4$ et $x_2 = 2,8$ les abscisses des points M_1 et M_2.



1. La distance entre les nombres 0 et x_1, notée $|x_1|$, est égale à la distance OM_1.
   Donner $|x_1|$ et $|x_2|$
2. La distance entre les nombres x_1 et x_2, notée $|x_2 - x_1|$, est égale à la distance M_1M_2.
   (a) Calculer $|x_2 - x_1|$.
   (b) Calculer $|x_2 - 1|$ et $|1 - x_2|$
   (c) Calculer $|1 - x_1|$.

Définition

Soit l'axe des abscisses et les nombres a et b abscisses respectives des points A et B.



La distance entre les nombres réels a et b est la distance AB, on la note $|b - a|$.
Ainsi la distance entre les nombres 0 et a est $|a|$.

Propriétés

Soit a et b deux nombres réels.

- $|a| \geqslant 0$
- $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a \leqslant 0 \end{cases}$
- $|-a| = |a|$
- $|b - a| = |a - b|$
- $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

Propriétés

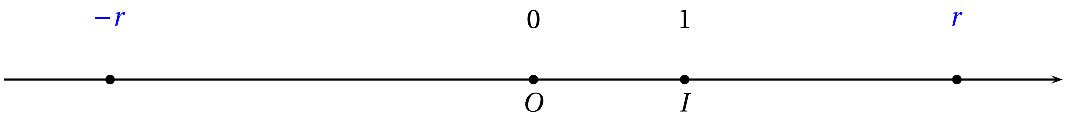
Soit a et b deux nombres réels.

- $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ (inégalité triangulaire)
- $|a|.|b| = |ab|$
- si $b \neq 0$,
  $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$

Propriété

Soit r un nombre réel.
L'équation $|x| = r$ admet :

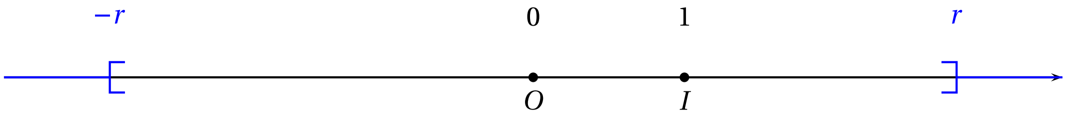
- Aucune solution si $r < 0$
- Une unique solution si $r = 0$: $x = 0$.
- Deux solutions si $r > 0$: $x = -r$ ou $x = r$.



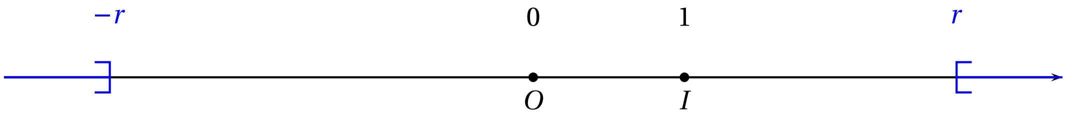
Propriétés

Soit r un nombre réel.

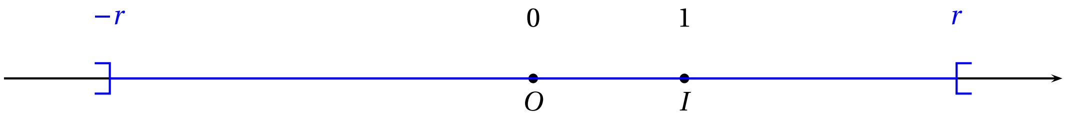
- L'inéquation $|x| > r$ admet :
  - $\mathbb{R}$ comme ensemble de solution si $r < 0$.
  - $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ comme ensemble de solution si $r = 0$.
  - $]-\infty\,;\,-r[\cup]r\,;\,+\infty[$ comme ensemble de solution si $r > 0$.



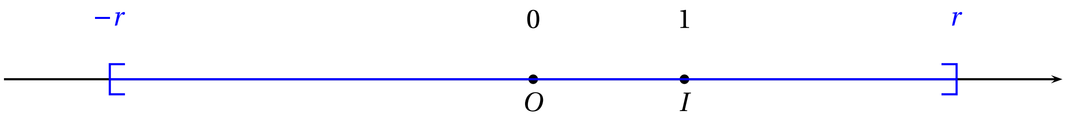
- L'inéquation $|x| \geqslant r$ admet :
  - $\mathbb{R}$ comme ensemble de solution si $r \leqslant 0$.
  - $]-\infty\,;\,-r]\cup[r\,;\,+\infty[$ comme ensemble de solution si $r > 0$.



- L'inéquation $|x| < r$ admet :
  - $\emptyset$ (ensemble vide) comme ensemble de solution si $r \leqslant 0$. (Aucun solution)
  - $]-r\,;\,r[$ comme ensemble de solution si $r > 0$.



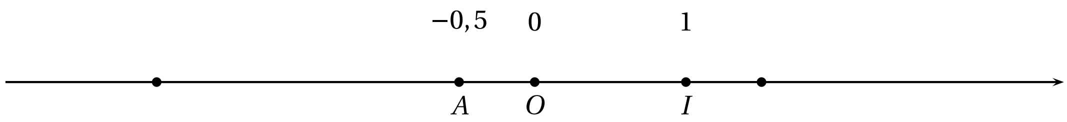
- L'inéquation $|x| \leqslant r$ admet :
  - $\emptyset$ (ensemble vide) comme ensemble de solution si $r < 0$.
  - $\{0\}$ comme ensemble de solution si $r = 0$.
  - $[-r\,;\,r]$ comme ensemble de solution si $r > 0$.



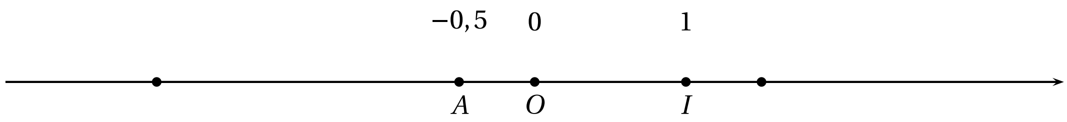
☞**Activité 2**

Soit l'axe des abscisses, le point M d'abscisse x et le point A d'abscisse $-0,5$.

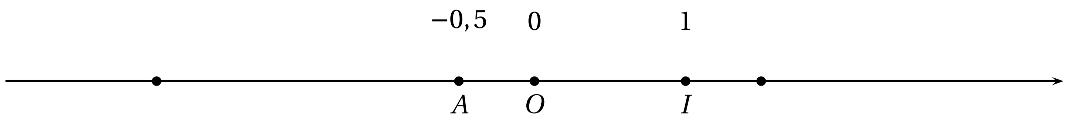
1. Comment choisir x pour que $|x-(-0,5)| > 2$?



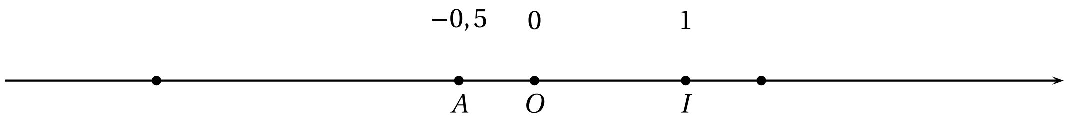
2. Comment choisir x pour que $|x-(-0,5)| \geqslant 2$?



3. Comment choisir x pour que $|x-(-0,5)| < 2$?



4. Comment choisir x pour que $|x-(-0,5)| \leqslant 2$?



Propriétés

Soit a un nombre réel et r un nombre strictement positif.

- L'ensemble des nombres réels x vérifiant $|x-a| > r$ est la réunion d'intervalles $]-\infty\,;\ a-r[\cup]a+r\,;\ +\infty[$.
- L'ensemble des nombres réels x vérifiant $|x-a| \geqslant r$ est la réunion d'intervalles $]-\infty\,;\ a-r]\cup[a+r\,;\ +\infty[$.
- L'ensemble des nombres réels x vérifiant $|x-a| < r$ est l'intervalle $]a-r\,;\ a+r[$.
- L'ensemble des nombres réels x vérifiant $|x-a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a-r\,;\ a+r]$.

II. Valeur approchée d'un nombre réel

Définition

La valeur approchée d'un nombre réel x ***arrondie*** à une précision de 10^{-n} est le nombre décimal $x' = \dfrac{a}{10^n}$ avec a entier relatif, tels que $|x-x'|$ ait la plus petite valeur.
Dans le cas où il existe deux valeurs pour x', on choisira la plus grande valeur.

Exemple

- La valeur arrondie à $10^0 = 1$ de π est $3 = \dfrac{3}{10^0}$.
- La valeur arrondie à 10^{-1} de π est $3,1 = \dfrac{31}{10}$.
- La valeur arrondie à 10^{-4} de π est $3,1416 = \dfrac{31\,416}{10^4}$.
- La valeur arrondie à 10^{-2} de $1,55$ est $1,6$.