Translations et Vecteurs

Table des Matières

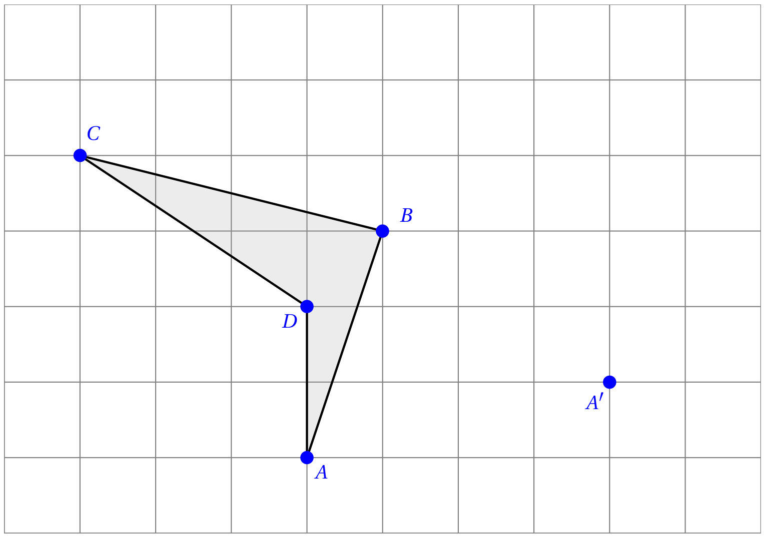
Translations et Vecteurs

I. Définition d'un vecteur

Activité 1

1. Par la translation qui transforme le point A en A' construire l'image du quadrilatère $ABCD$, le quadrilatère $A'B'C'D'$ (en respectant l'ordre des points).

2. Que pouvez-vous dire :
   - des droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD'),
   - des longueurs AA', BB', CC' et DD',
   - Du sens de la translation.

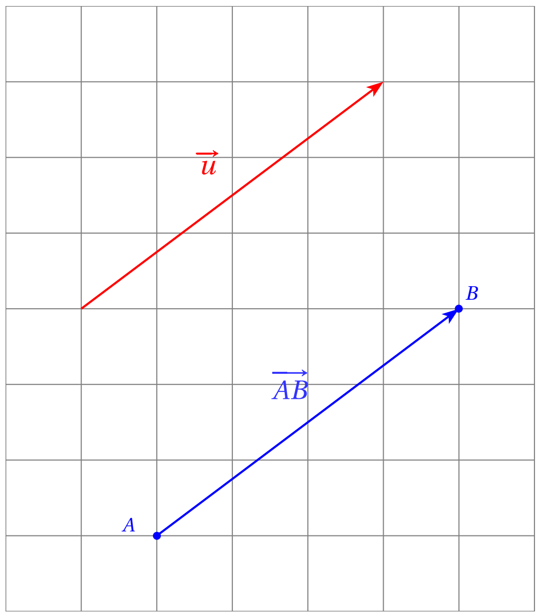


Définition

La translation qui transforme un point A en un point B ($A \neq B$) est caractérisée par le ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$, ces ***trois caractéristiques*** sont

- une direction : une droite parallèle à la droite (AB),
- un sens : de A vers B,
- une longueur : la longueur AB, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ et appelée norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être représentée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ indépendant de point du plan, le vecteur $\overrightarrow{u}$ possède les trois mêmes caractéristiques que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

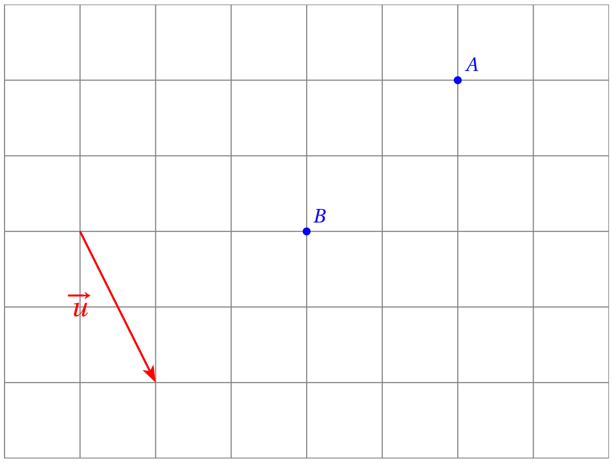


Le point A est appelé ***origine*** du vecteur, le point B est appelé ***extrémité*** du vecteur.

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le ***vecteur nul***, noté $\overrightarrow{0}$.

☞**Exercice 1**

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, construire l'image du point A et du point B qu'on notera respectivement A' et B'. Conjecturer la nature du quadrilatère $AA'B'B$?

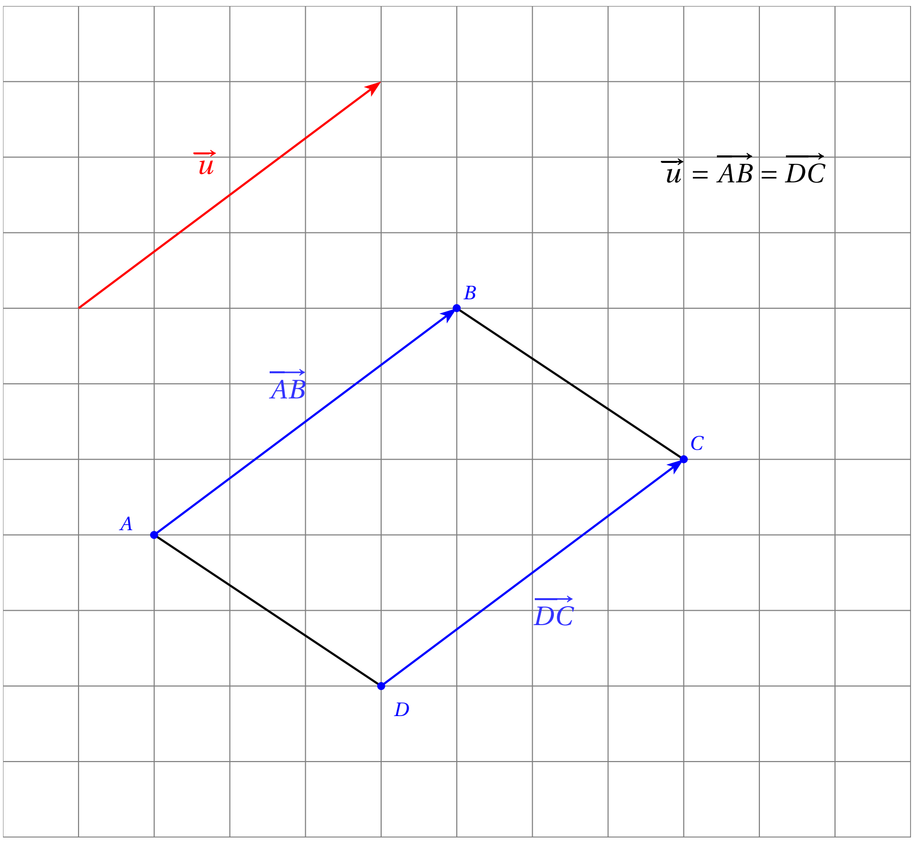


II. Égalité de vecteurs

Définition

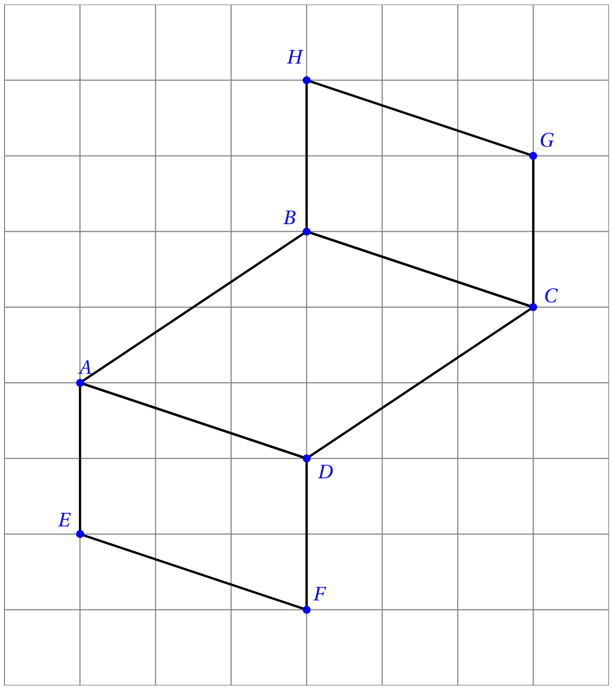
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux si C se déduit du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, autrement dit, si le quadrilatère $ABCD$ forme un parallélogramme.
Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont définis par :

- une même direction : $(AB)//(CD)$
- un même sens : de A vers B et de D vers C
- une même longueur : $AB = CD$.



☞**Exercice 2**

$ABCD$, $BCGH$ et $ADFE$ sont des parallélogrammes



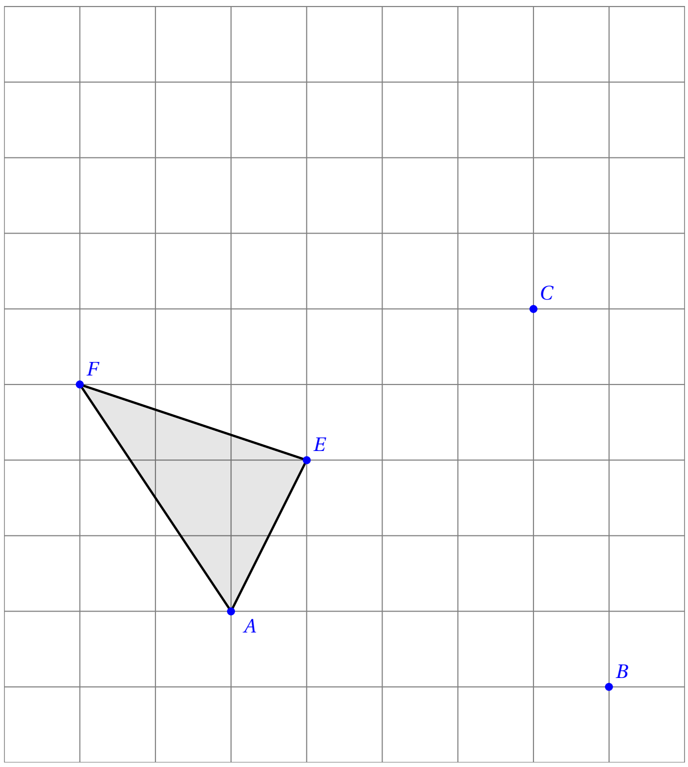
1. Justifier l'égalité $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et en déduire la nature du quadrilatère $FEHG$.
2. En déduire l'égalité $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

III. Opérations sur les vecteurs

III. A. Relation de Chasles, addition de vecteurs

☞**Activité 2**

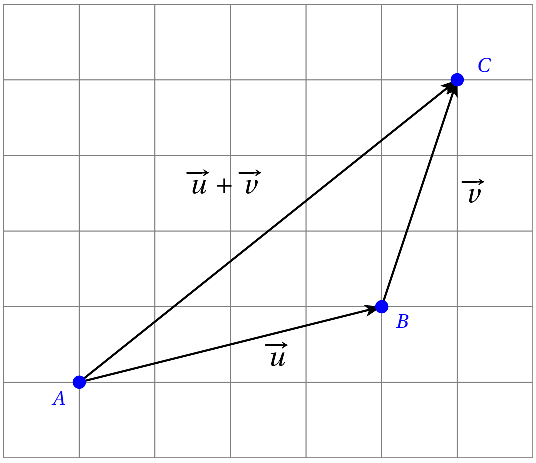
Soient un triangle AEF et deux points B et C du plan.



1. Construire le triangle $BE'F'$ image du triangle AEF par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Construire le triangle $CE''F''$ image du triangle $BE'F'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
3. Par quelle translation déduit-on le triangle $CE''F''$ du triangle AEF ?

Définition

(**relation de Chasles**)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan,
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$.
On a alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Cette relation est aussi très utilisée pour décomposer un vecteur : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Exercice 3

1. Simplifier la somme suivante : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$.
   Faire une figure qui illustre la somme.

2. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ par la relation de Chasles en faisant intervenir le point H.
   Faire une figure qui illustre décomposition du vecteur $\overrightarrow{EF}$ par une somme.

III. B. Opposé d'un vecteur

Activité 3

Soient A et B deux points distincts du plan.
Par la relation de Chasles, simplifier la somme suivante : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} =$

Définition

Soient A et B deux points distincts du plan, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est le ***vecteur opposé*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On note alors $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ce qui revient à écrire $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ on peut écrire $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Remarque

Il revient au même décrire

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

Exercice 4

Soient A, B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$.
Faire une figure et compléter les deux égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{AI} =$
2. $\overrightarrow{AI} + \ldots\ldots = \overrightarrow{0}$

Exercice 5

Simplifier la somme vectorielle suivante : $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{KN}$

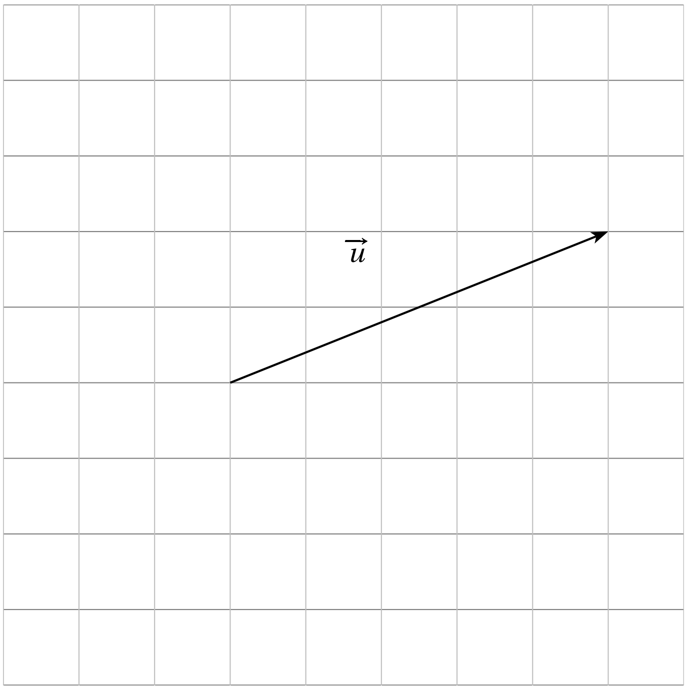
✒ **Remarque**

Dans les exercices on évitera de garder des signes négatifs, l'écriture avec une somme de vecteurs permettant de simplifier les expressions avec la relation de Chasles.

III. C. multiplication d'un vecteur par un nombre réel

☞**Activité 4**

Soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan.



1. Construire le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}$ noté $2.\overrightarrow{u}$.
2. Avec la même idée, construire le vecteur $-0,5.\overrightarrow{u}$.

✒ **Définition**

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan et k un nombre réel.
Si $k=0$ le vecteur $k.\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul.
Sinon le vecteur $k.\overrightarrow{u}$ est caractérisé par :

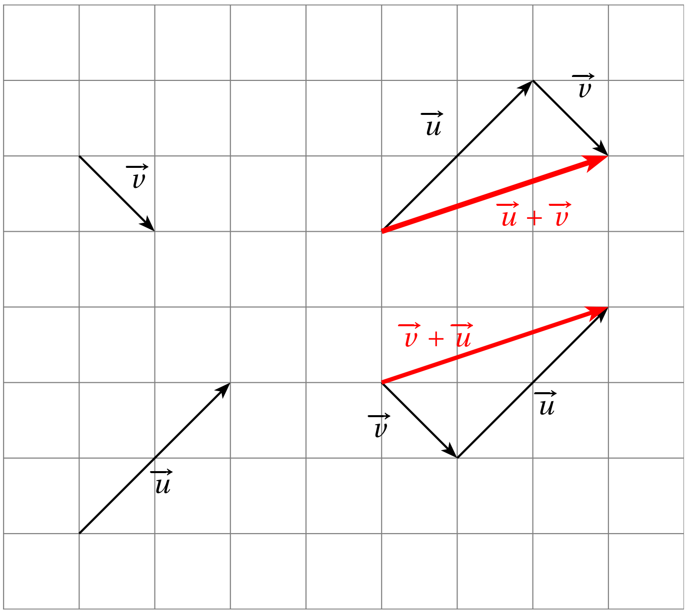
- la même direction que celle du vecteur $\overrightarrow{u}$
-
  - le même sens que celui du vecteur $\overrightarrow{u}$ si $k>0$.
  - le sens opposé à celui du vecteur $\overrightarrow{u}$ si $k<0$.
- sa longueur est $|k|.\|u\|$

III. D. Propriétés des opérations

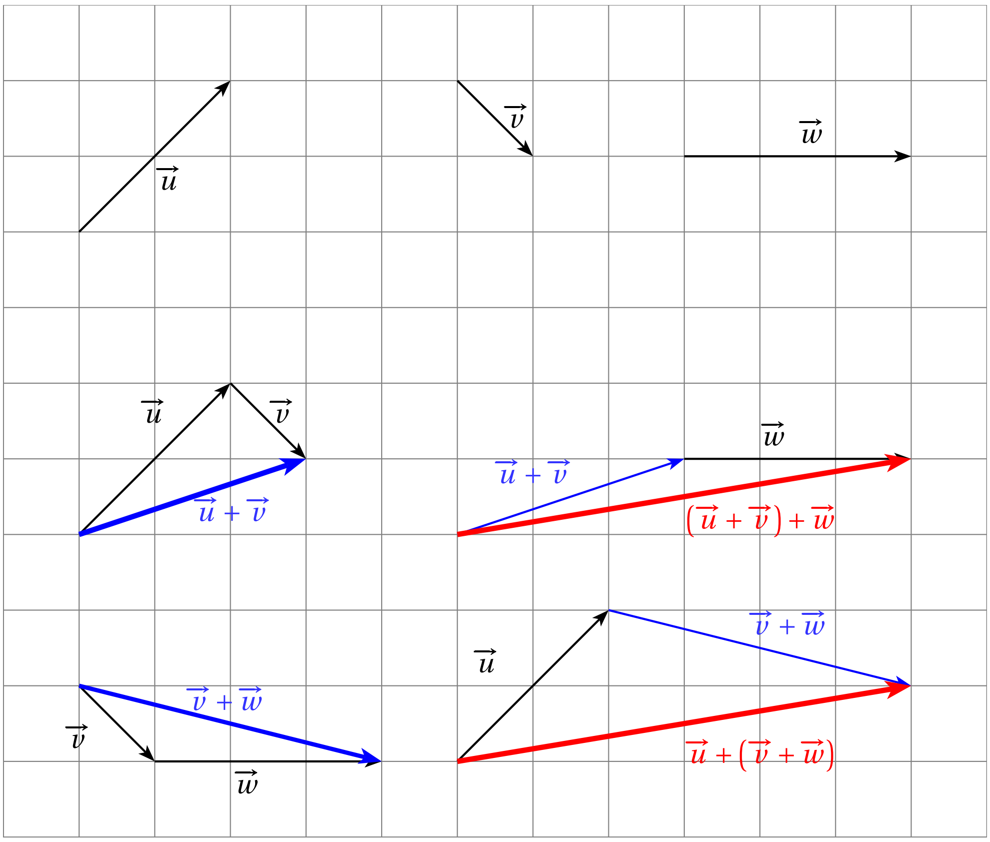
Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et k un réel non nul :

- L'addition est commutative : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$

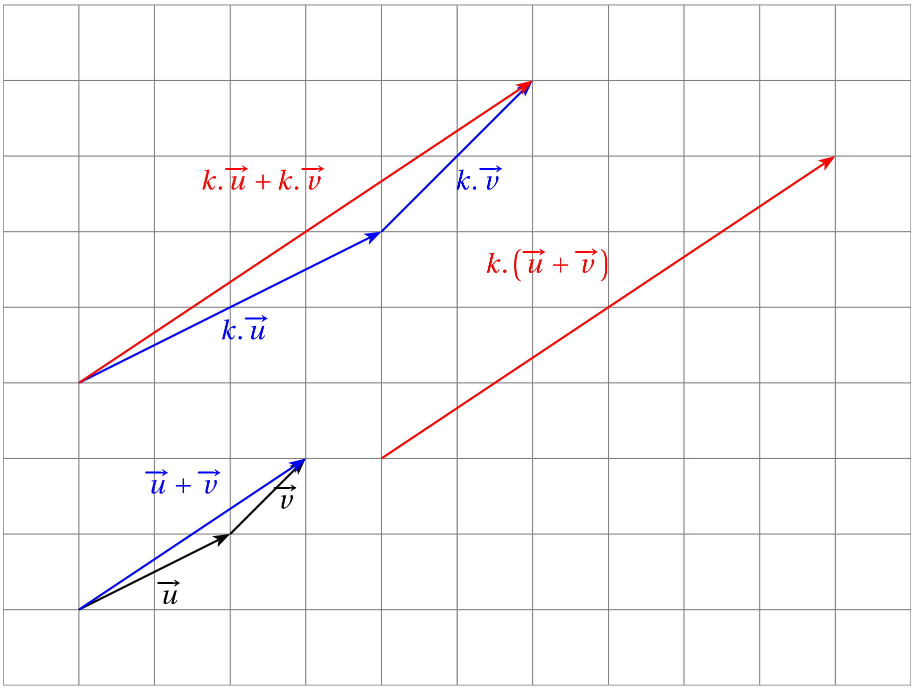


- L'addition de associative : $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)$



Propriétés

- Distributivité de la multiplication par un réel par rapport à l'addition : $k\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=k\overrightarrow{u}+k\overrightarrow{v}$



Exercice 6

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Pour tout point M du plan, montrer que $2.\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

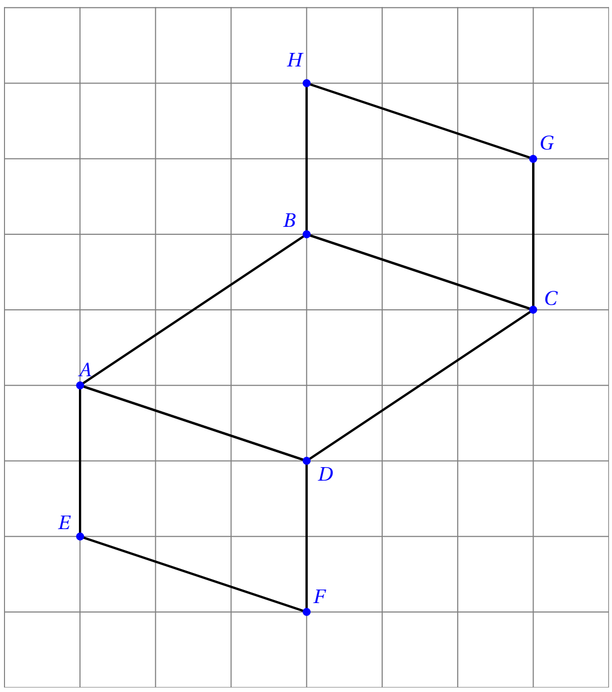
Exercice 7

Simplifier la somme vectorielle suivante : $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

Exercice 8

Cet exercice propose une autre démonstration de l'exercice 2.

$ABCD$, $BCGH$ et $ADFE$ sont des parallélogrammes, justifier l'égalité $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}$ et en déduire la nature du quadrilatère $FGHE$.



☞**Exercice 9**

Soit A, B et C trois points non alignés du plan et le point E tel que $2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CE}$.

1. Démontrer l'égalité $3\overrightarrow{AE}=2.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$ (on pourra utiliser la relation de Chasles et décomposer les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE}$ en faisant intervenir le point A).

2. En déduire la construction du point E.