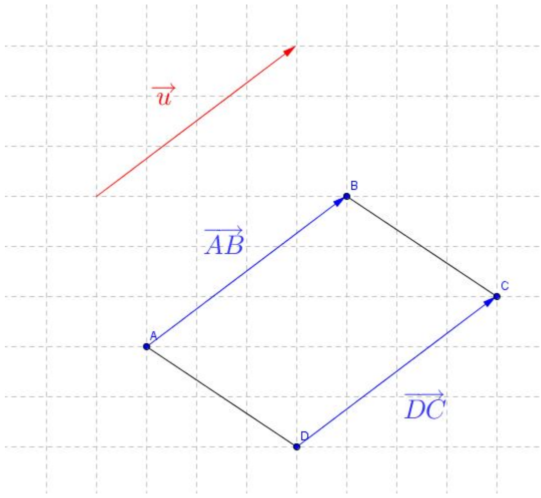
Translation et Vecteurs

1 Vecteur et translation

Définition :
Soit un parallélogramme $ABCD$. On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ l'application qui transforme A en B, D en C. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ainsi égal au vecteur $\overrightarrow{DC}$, on peut aussi les notés $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ s'ils ne sont pas représentés par des points du plan :

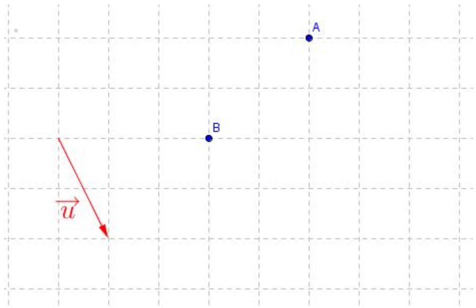


Le point A est appelé *origine* du vecteur, le point B est appelé *extrémité* du vecteur.

Remarque :
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ a trois caractéristiques :
- une direction : la droite (AB),
- un sens : de A vers B,
- une longueur : la longueur AB.

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, on le note $\overrightarrow{0}$.

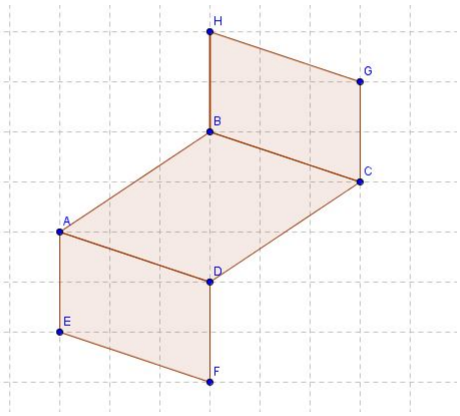
Exemple :
Par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, construire l'image du point A et du point B qu'on notera respectivement A' et B'. Que pouvez vous dire du quadrilatère $AA'B'B$? Justifier par une égalité de deux vecteurs.



2 Égalité de vecteurs

Théorème :
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux si C se déduit du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, autrement dit, si $ABCD$ forme un parallélogramme.
Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont définis par :
- une même direction : $(AB)//(CD)$
- un même sens : de A vers B et de D vers C
- une même longueur : $AB = CD$.

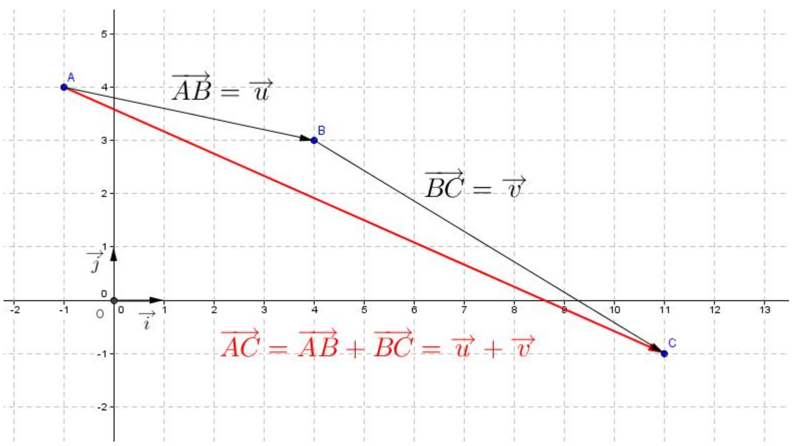
Exemple :
$ABCD$, $BCGH$ et $ADFE$ sont des parallélogrammes, justifier l'égalité $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et en déduire la nature du quadrilatère $FEHG$.



3 Addition de vecteurs

3.1 Relation de Chasles

Théorème (relation de Chasles) :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. On a alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Exemple :

1. Simplifier la somme suivante : $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$
2. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ par la relation de Chasles en faisant intervenir le point H.

3.2 Opposé d'un vecteur

Soit A et B deux points distincts du plan.
Par la relation de Chasles, simplifier la somme suivante :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=$
Notation :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés, on note alors :
$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.
Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ on peut écrire $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

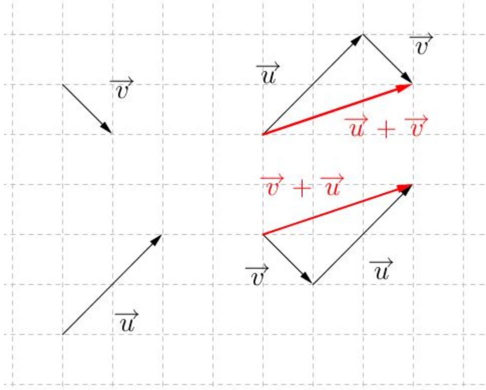
Exercice :
Soit A, B deux points distincts et I le milieu du segment $[AB]$.
Faire une figuer et compléter les égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{AI}=$
2. $\overrightarrow{AI}+ ...... =\overrightarrow{0}$

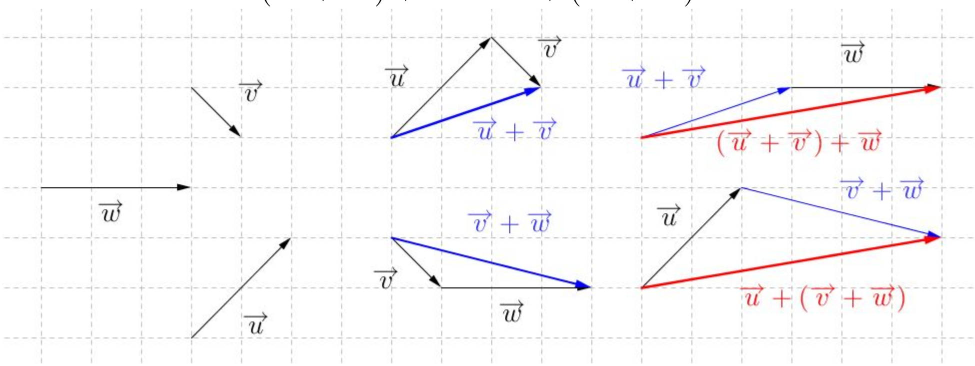
3.3 Propriétés de l'addition

Théorème :
Soit $\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs :

— L'addition est commutative : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$



— L'addition de associative : $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$



Exemple :
Simplifier la somme vectorielle suivante : $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

3.4 Exercice de démonstration

$ABCD$, $BCGH$ et $ADFE$ sont des parallélogrammes tels que $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{GC}$, justifier l'égalité $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}$ et en déduire la nature du quadrilatère $FGHE$.