Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

Stéphane Mirbel

Définition

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y, un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

ou de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & d \\ a'x+b'y & = & d' \end{array}\right. .$$

avec a, b, c, d, a', b', c' et d', des nombres réels ; $(a\,;\ b) \neq (0\,;\,0)$ et $(a'\,;\ b') \neq (0\,;\,0)$

Le(s) éventuelle(s) solution(s) d'un tel système sont des couples de nombres réels $(x\,;\ y)$ qui vérifient chacune des deux équations.

Exemple

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -1 \\ 3x-2y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le couple $(2\ ;\ 3)$ est solution du système alors que le couple $(-1\ ;\ 0)$ n'est pas solution du système.

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

On a les règles de calculs suivantes :

- On peut multiplier chaque équation par un réel k et k' non nuls :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} kax+kby+kc & = & 0 \\ k'a'x+k'b'y+k'c' & = & 0 \end{array}\right.$$

- On peut ajouter (ou soustraire) deux équations d'un système en gardant une équation initiale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ (a+a')x+(b+b')y+(c+c') & = & 0 \end{array}\right.$$

Propriété

Soit le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

- si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ alors le système a soit aucune solution soit une infinité de couples solutions.
- si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ alors le système possède un unique couple solution.

Résolution par substitution

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 5 - 3\times 1 \neq 0.$

Le système admet donc un unique couple solution.

Résolution par substitution (on substitue une inconnue dans le deuxième) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ 3x+5(-2x-1)-4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ 3x-10x-5-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ -7x & = & 9 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2\times\dfrac{-9}{7}-1 \\ x & = & \dfrac{-9}{7} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{11}{7} \\ x & = & \dfrac{-9}{7} \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est le couple $\left(\dfrac{-9}{7}\,;\,\dfrac{11}{7}\right)$

Résolution par combinaison

Soit le système (le même que le précédent)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Résolution par combinaison (on utilise les règles opératoires sur les systèmes) :

- On multiplie la première équation par -5 dans le but de ne plus avoir l'inconnue y et de trouver x :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -10x-5y-5 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right.$$
- On garde la première équation simplifiée, on ajoute les deux équations membre à membre du système précédent :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ -7x-9 & = & 0 \end{array}\right.$$
- On finit la résolution en prévoyant de trouver y à partir de la première équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ x & = & \dfrac{-9}{7} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2\times\dfrac{-9}{7}-1 \\ x & = & \dfrac{-9}{7} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{-9}{7} \\ y & = & \dfrac{11}{7} \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est le couple $\left(\dfrac{-9}{7}\,;\,\dfrac{11}{7}\right)$

Résolution par combinaison

Soit le système (le même que le précédent)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Résolution par combinaison (on utilise les règles opératoires sur les systèmes) :

- On multiplie la première équation par 3 et la deuxième par (-2) dans le but de ne plus avoir l'inconnue x et de trouver y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y+3 & = & 0 \\ -6x-10y+8 & = & 0 \end{array}\right.$$

- On garde la première équation simplifiée, on ajoute les deux équations membre à membre du système précédent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ -7y+11 & = & 0 \end{array}\right.$$

- On finit la résolution en prévoyant de trouver y à partir de la première équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{-y-1}{2} \\ y & = & \dfrac{11}{7} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{-\frac{11}{7}-1}{2} \\ y & = & \dfrac{11}{7} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{-9}{7} \\ y & = & \dfrac{11}{7} \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est le couple $\left(\dfrac{-9}{7}\,;\,\dfrac{11}{7}\right)$

FIN