Calculs de probabilités

Stéphane Mirbel

Calcul de probabilités : Propriétés

- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement.
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.

Calcul de probabilités : exemple

Lors d'une élection, on donne les fréquences stables des intentions de votes de 6 candidats issus de deux associations $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$:

Candidat	Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zêta
Association	$\mathscr{A}$	$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{B}$
Probabilités	$10\% = 0,1$	$30\% = 0,3$	$5\% = 0,05$	$5\% = 0,05$	$4\% = 0,4$	x

Le jour de l'élection, on choisit un candidat :

- Déterminer la probabilité manquante x :
  L'univers est l'ensemble des candidats : $\Omega = \{$Apha ; ... ; Zêta$\}$
  À chaque événement élémentaire de l'univers on associe sa fréquence stable par exemple : $P\left(\{Alpha\}\right) = 0,1$.
  La somme des probabilités des événements élémentaires de l'univers est 1, ainsi $0,1 + 0,3 + 0,05 + 0,05 + 0,4 + x = 1$ soit $x = 0,1$.
- Déterminer la probabilité de l'événement A, le candidat est issu de l'association $\mathscr{A}$:
  $P(A) = P\left(\{Alpha\}\right) + P(\{Beta\}) = 0,1 + 0,3 = 0,4$.

Calcul de probabilités : équiprobabilités

On parle d'équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de l'univers Ω ont la même probabilité p.

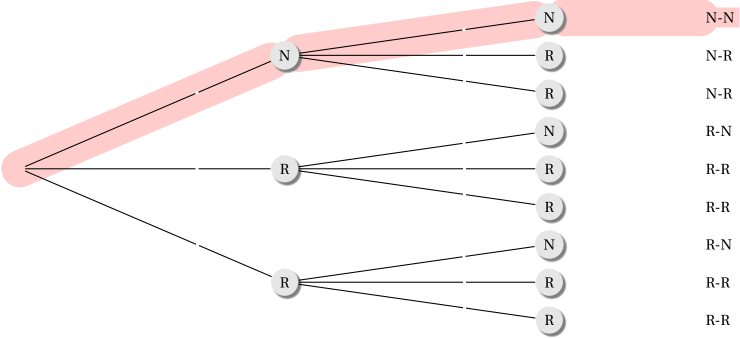
On note $|\Omega|$ le nombre d'éléments de Ω.

Dans un cas d'équiprobabilité,

- la probabilité d'un événement élémentaire est $p = \dfrac{1}{|\Omega|}$.
- la probabilité d'un événement A (non vide) est $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Une urne contient une boules noires et deux boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne, on effectue un deuxième tirage d'une boule de l'urne (tirage avec remise).

- Déterminer l'univers Ω :



$\Omega = \{NN\ ;\ NR\ ;\ NR\ ;\ RN\ ;\ RR\ ;\ RR\ ;\ RN\ ;\ RR\ ;\ RR\}$

Calcul de probabilités : équiprobabilités - exemple

Une urne contient une boules noires et deux boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne, on effectue un deuxième tirage d'une boule de l'urne (tirage avec remise).

- Déterminer l'univers Ω :

	N	R	R
N	NN	NR	NR
R	RN	RR	RR
R	RN	RR	RR

$\Omega = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$

Calcul de probabilités : équiprobabilités - exemple

- Déterminer la probabilité d'un événement élémentaire :
  $\Omega = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$
  On est dans un cas d'équiprobabilité, ainsi la probabilité de chacune des neuf événements élémentaires est $\dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{9}$.
- Déterminer la probabilité de l'événement A « obtenir au moins une boule rouge » :
  $A = \{NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$. $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{9}$.
- Déterminer la probabilité de l'événement B « obtenir au plus une boule rouge » :
  $B = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RN\}$. $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{9}$.

$\Omega = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$

A « obtenir au moins une boule rouge » :

$A = \{NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ \ ;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$. $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{9}$.

B « obtenir au plus une boule rouge » :

$B = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RN\}$. $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{9}$.

- Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$ « obtenir au moins une boule rouge et au plus une boule rouge » :
  $A \cap B = \{NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RN\}$.
  $A \cap B$: « obtenir exactement une boule rouge ».
  $P(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{9}$.

Calcul de probabilités : équiprobabilités - exemple

$\Omega = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$

A « obtenir au moins une boule rouge » :

$A = \{NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ \,;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$. $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{9}$.

B « obtenir au plus une boule rouge » :

$B = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RN\}$. $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{9}$.

$A \cap B$: « obtenir exactement une boule rouge ».

$A \cap B = \{NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RN\}$. $P(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{9}$.

- Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$ « obtenir au moins une boule rouge ou au plus une boule rouge » :

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{8}{9} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{9}{9} = 1$.

  $A \cup B = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\} = \Omega$

  $P(A \cup B) = \dfrac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \dfrac{9}{9} = 1$.

Calcul de probabilités : équiprobabilités - exemple

$\Omega = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$

A « obtenir au moins une boule rouge » :

$A = \{NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ \ ;\ RR\,;\ RR\,;\ RN\,;\ RR\,;\ RR\}$. $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{9}$.

B « obtenir au plus une boule rouge » :

$B = \{NN\,;\ NR\,;\ NR\,;\ RN\,;\ RN\}$. $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{9}$.

- Déterminer la probabilité de l'événement contraire de A noté $\overline{A}$ « ne pas obtenir au moins une boule rouge » :

  $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{1}{9}$

  $\overline{A} = \{NN\}$.

  $\overline{A}$: « obtenir deux boules noires ».

  $P(\overline{A}) = \dfrac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{9}$.

FIN