Positions relatives de droites du plan et systèmes d'équations

Table des Matières

☙ Positions relatives de droites du plan et systèmes d'équations ❧

I. Droites parallèles du plan

Propriété

Deux droites du plan peuvent être :

- confondues,
- ou parallèles,
- ou sécantes en un point.

Remarque

Deux droites perpendiculaires sont sécantes.

Activité 1

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation respective $y = 0,5x - 3$ et $x - 2y + 5 = 0$.
Que pouvez-vous dire de ces deux droites ?

Propriété

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Soient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation cartésienne respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ et $(a'\,;\,b') \neq (0\,;\,0)$.
Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$.

Démonstration 1

1. Déterminer un vecteur directeur pour chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
2. En déduire le résultat du théorème.

Exercice 1

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.

1. Dire si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation cartésienne respective $2x + 3y + 5 = 0$ et $-x + \frac{-3}{2}y - 1 = 0$ sont parallèles en calculant le déterminant associé.
2. Dire si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation cartésienne respective $x + \frac{y}{2} - 1 = 0$ et $4x + y - 1 = 0$ sont parallèles en calculant le déterminant associé.

II. Systèmes linaires de deux équations à deux inconnues

Définition

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y, un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

ou de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & d \\ a'x+b'y & = & d' \end{array}\right. .$$

avec a, b, c, d, a', b', c' et d', des nombres réels ; $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ et $(a'\,;\,b') \neq (0\,;\,0)$
Le(s) éventuelle(s) solution(s) d'un tel système sont des couples de nombres réels $(x\,;\,y)$ qui vérifient chacune des deux équations.

Exemple

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -1 \\ 3x-2y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le couple $(2\,;\,3)$ est solution du système alors que le couple $(-1\,;\,0)$ n'est pas solution du système.

Propriétés

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

On a les règles de calculs suivantes :

- On peut multiplier chaque équation par un réel k et k' non nuls :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} kax+kby+kc & = & 0 \\ k'a'x+k'b'y+k'c' & = & 0 \end{array}\right.$$

- On peut ajouter (ou soustraire) deux équations d'un système en gardant une équation initiale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ (a+a')x+(b+b')y+(c+c') & = & 0 \end{array}\right.$$

Propriété

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

- si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ alors le système a soit aucune solution soit une infinité de couples solutions.
- si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ alors le système possède un unique couple solution.

☞**Démonstration 2**

Cette propriété est la conséquence de la position relative des droites du plan avec la particularité que si deux droites sont confondues, elles sont parallèles et elles ont la même équation cartésienne à un coefficient réel non nul près.

Remarque

Dans le cas d'une unique solution, le couple solution est le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites associées aux équations du système.

Exemple

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 5 - 3\times 1 \neq 0.$

Le système admet donc un unique couple solution.

Résolution par substitution (on substitue une inconnue dans le deuxième) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ 3x+5(-2x-1)-4 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ 3x-10x-5-4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ -7x & = & 9 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2\times\frac{-9}{7}-1 \\ x & = & \frac{-9}{7} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{4}{7} \\ x & = & \frac{-9}{7} \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est le couple $\left(\frac{-9}{7}\,;\,\frac{4}{7}\right)$

Exemple

Soit le système (le même que le précédent)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Résolution par combinaison (on utilise les règles opératoires sur les systèmes) :

- On multiplie la première équation par -5 dans le but de ne plus avoir l'inconnue y et de trouver x :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -10x-5y-5 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right.$$

- On garde la première équation simplifiée, on ajoute les deux équations membre à membre du système précédent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ -7x-9 & = & 0 \end{array}\right.$$

- On finit la résolution en prévoyant de trouver y à partir de la première équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ x & = & \frac{-9}{7} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2\times\frac{-9}{7}-1 \\ x & = & \frac{-9}{7} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-9}{7} \\ y & = & \frac{4}{7} \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est le couple $\left(\frac{-9}{7}\,;\,\frac{4}{7}\right)$

Exercice 2

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.

Déterminer la position relative et le point d'intersection le cas échéant, des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation respective $-3x+2y-1=0$ et $5x-4y+3=0$.

Faire une figure pour vérifier les résultats.