Positions relatives de deux droites du plan

Stéphane Mirbel

Position relative de deux droites du plan

Deux droites du plan peuvent être :

- confondues,
- ou parallèles,
- ou sécantes en un point.

Propriété :
Soit un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Soient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation cartésienne respective
$ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$
avec $(a\,;\ b)\neq(0\,;\ 0)$ et $(a'\,;\ b')\neq(0\,;\ 0)$.
Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b=0.$$

Position relative de deux droites du plan - exemple

Soit un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.

Soient les droites :

- $\mathscr{D}$: $3x-2y+5=0$ (E_1) ; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}'$: $-4x+5y+2=0$ (E_2) ; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_2\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}''$: $-6x+4y-1=0$ (E_3) ; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_3\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$:
  - $\det\left(\overrightarrow{u}_1\,;\ \overrightarrow{u}_2\right)=\begin{vmatrix}2&-5\\3&-4\end{vmatrix}=2\times(-4)-(-5)\times 3=7\neq 0$
  - $\det(E_1\,;\ E_2)=\begin{vmatrix}3&-2\\-4&5\end{vmatrix}=3\times 5-(-2)\times(-4)=7\neq 0$
  - Le déterminant des vecteurs directeur ou le déterminant des équations est non nul, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en un point A (voir résolution de systèmes).

Position relative de deux droites du plan - exemple

Soit un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.

Soient les droites :

- $\mathscr{D} : 3x - 2y + 5 = 0$ (E_1) ; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}' : -4x + 5y + 2 = 0$ (E_2) ; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}'' : -6x + 4y - 1 = 0$ (E_3) ; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$:
  - $\det\left(\overrightarrow{u}_1\ ;\ \overrightarrow{u}_3\right) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 2 \times (-6) - (-4) \times 3 = 0$
  - $\det\left(E_1\ ;\ E_3\right) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 0$
  - Le déterminant des vecteurs directeur ou le déterminant des équations est nul, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$ sont parallèles ou confondues.

Position relative de deux droites du plan - exemple

Soit un repère $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ du plan.
Soient les droites :

- $\mathscr{D} : 3x - 2y + 5 = 0\ (E_1)$; vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}' : -4x + 5y + 2 = 0\ (E_2)$; vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}'' : -6x + 4y - 1 = 0\ (E_3)$; vecteur directeur $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$:
  - Le déterminant des vecteurs directeur ou le déterminant des équations est nul, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$ sont parallèles ou confondues.
  - Pour $x = 1$, avec l'équation de $\mathscr{D}$ on trouve $y = 4$, le point de coordonnées $(1\ ;\ 4)$ est sur la droite $\mathscr{D}$. Ces coordonnées ne vérifient pas l'équation de $\mathscr{D}''$, ainsi les droite $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$ sont strictement parallèles.

Position relative de deux droites du plan - exemple

Soit un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Soient les droites :

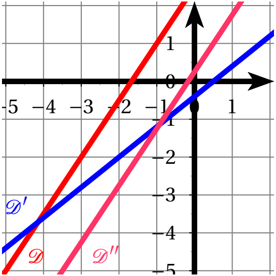
- $\mathscr{D} : 3x - 2y + 5 = 0\ (E_1)$; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}' : -4x + 5y + 2 = 0\ (E_2)$; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}'' : -6x + 4y - 1 = 0\ (E_3)$; vecteur directeur $\overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$:
    - $\mathscr{D} // \mathscr{D}''$ et $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes donc $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont sécantes.

Position relative de deux droites du plan - exemple

Soit un repère $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ du plan.

Soient les droites :

- $\mathscr{D} : 3x - 2y + 5 = 0\ (E_1)$; vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}' : -4x + 5y + 2 = 0\ (E_2)$; vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $\mathscr{D}'' : -6x + 4y - 1 = 0\ (E_3)$; vecteur directeur $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$
- vérification :



FIN