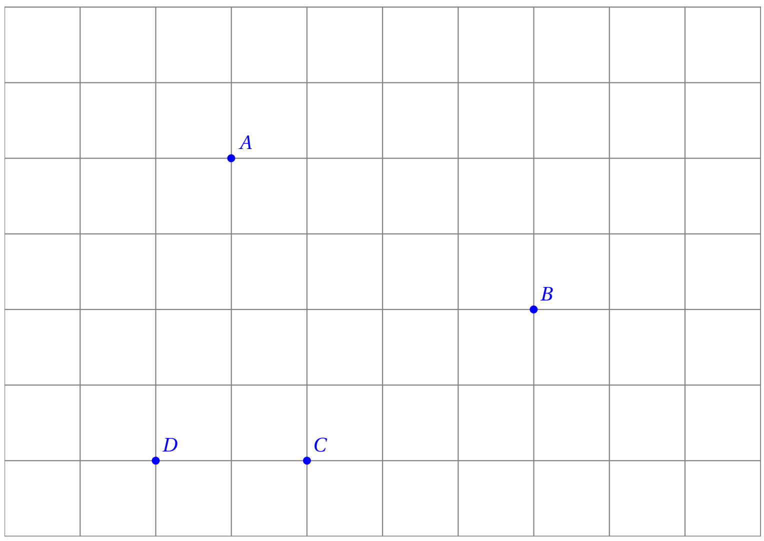
Parcours différenciés : Nombres et équations

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

I. Constructions

☞**Exercice 1** ✧

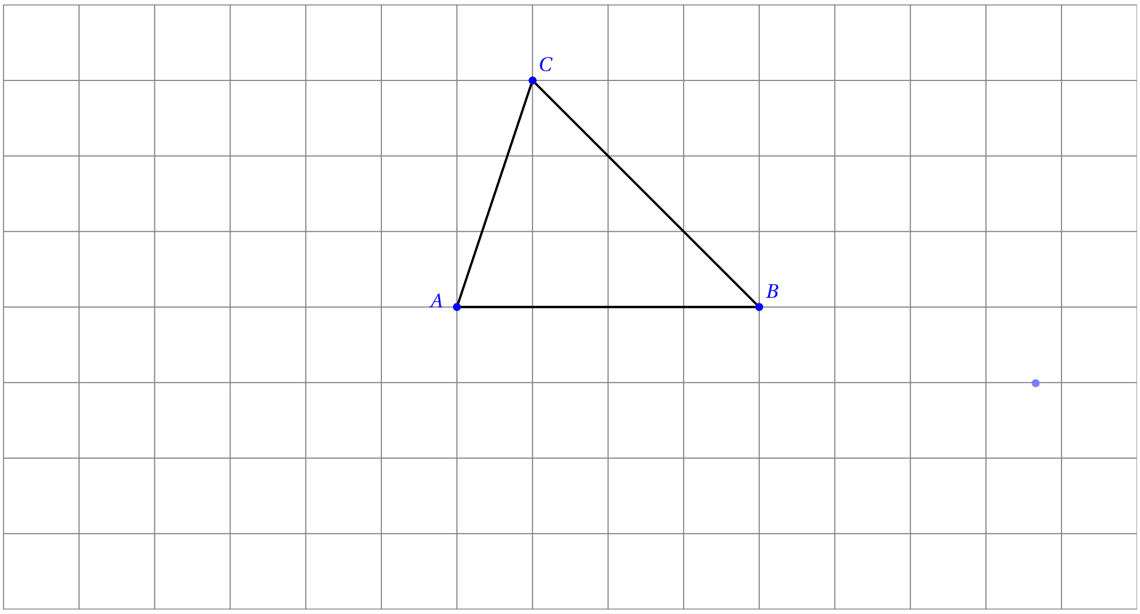
A, B, C et D sont quatre points du plan.



1. Construire le point E image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ puis le point F image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.
2. Construire le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$.
3. Construire le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

☞**Exercice 2** ✧✧

ABC est un triangle, construire les points E et G tels que :
$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$.



Aide : Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CF}$ et modifier l'expression pour faire une somme de deux vecteurs.

II. Opérations sur les vecteurs

☞**Exercice 3** ✧

1. Simplifier les sommes des vecteurs suivantes (utiliser la relation de Chasles) :
   (a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
   (b) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}$
   (c) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}$
2. Décomposer les vecteurs suivants en complétant le somme de vecteurs :
   (a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A...} + \overrightarrow{...C}$
   (b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A...} + \overrightarrow{E...} + \overrightarrow{F...}$
   (c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + ... + \overrightarrow{DB}$

☞**Exercice 4** ✧

À l'aide de la relation de Chasles, démontrer les égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FD} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{0}$

☞**Exercice 5** ✧

A, B et C sont trois points du plan.
On considère les points E et F tels que :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

☞**Exercice 6** ✧✧

A, B et C sont trois points du plan.
On considère les points E et F tels que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = -\frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

III. Démonstration

☞**Exercice 7** ✧

$ABCD$ est un parallélogramme. Le point E est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{DE}$.
2. Que peut-on déduire de l'égalité vectorielle précédente ?

☞**Exercice 8** ✧✧

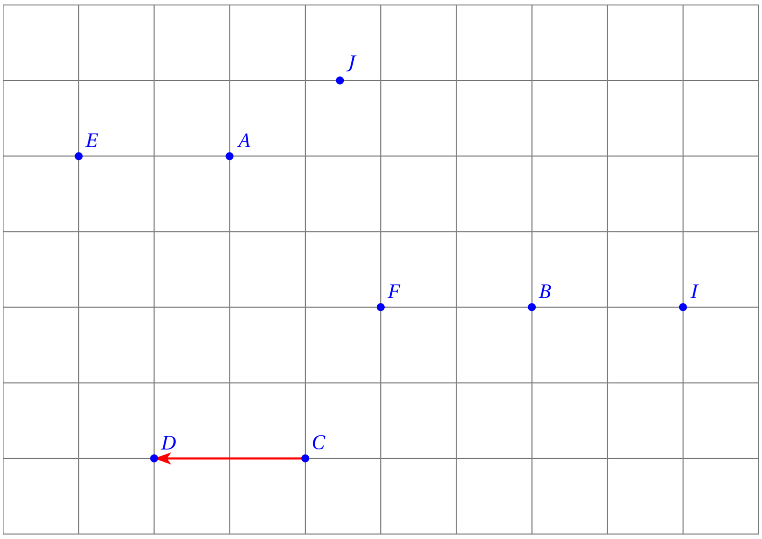
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O, I est le milieu du segment $[AD]$.
Démontrer l'égalité $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

☞**Exercice 9** ✧✧✧

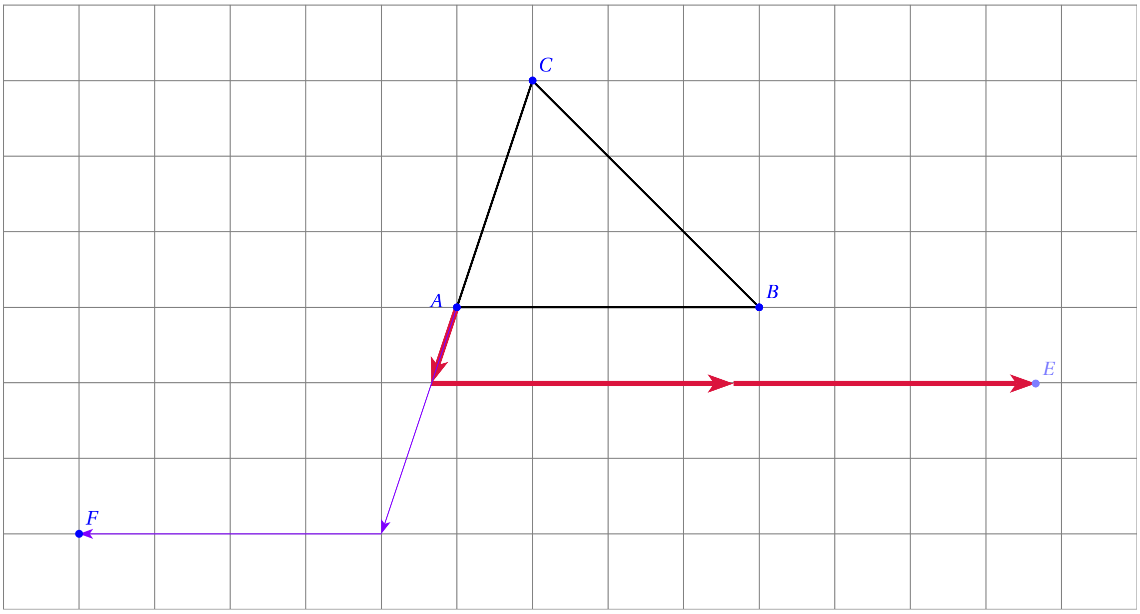
ABC est un triangle, D est tel que $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, E est tel que $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$.
La droite (DE) coupe le segment $[AB]$ en F.
Démontrer que le point F est le milieu du segment $[AB]$.

Correction

☞Exercice 1 ✧



☞Exercice 2 ✧



$\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$.

☞Exercice 3 ✧

1. (a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
   (b) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EH}$
   (c) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

2. Décomposer les vecteurs suivants en complétant le somme de vecteurs :

   (a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZC}$ (n'importe qu'elle point du plan convient).
   (b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$
   (c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

☞Exercice 4 ✧

À l'aide de la relation de Chasles, démontrer les égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{0}$

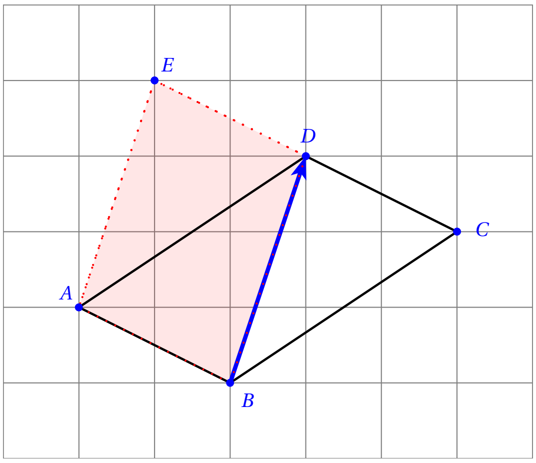
☞Exercice 5 ✧

A, B et C sont trois points du plan.
On considère les points E et F tels que :
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$. Avec la relation de Chasles, on a :
$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

☞Exercice 6 ✧✧

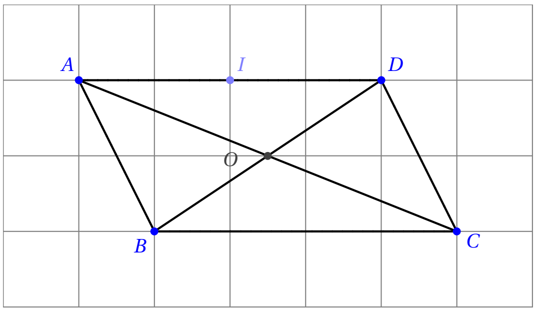
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AF}=-\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Avec la relation de Chasles, on a :
$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{6}{5}\right)\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC}=-\frac{17}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$.

☞Exercice 7 ✧



1. E est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, donc $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}$ et $BDEA$ est un parallélogramme.
   $BDEA$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$.
   $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
   $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$ donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{ED}$ ce qui équivaut à $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DE}$.
2. $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{ED}$ donc D est le milieu du segment $[EC]$ et les points E, D et C sont alignés.

☞**Exercice 8** ✧✧



$ABCD$ est un parallélogramme de centre O donc $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

I est le milieu du segment $[AD]$ donc $\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

☞**Exercice 9** ✧✧✧

Coup de pouce : On considère I milieu du segment $[AC]$, exprimer $\overrightarrow{EI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis le vecteur $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{ED}$ ont la même direction. Conclure.