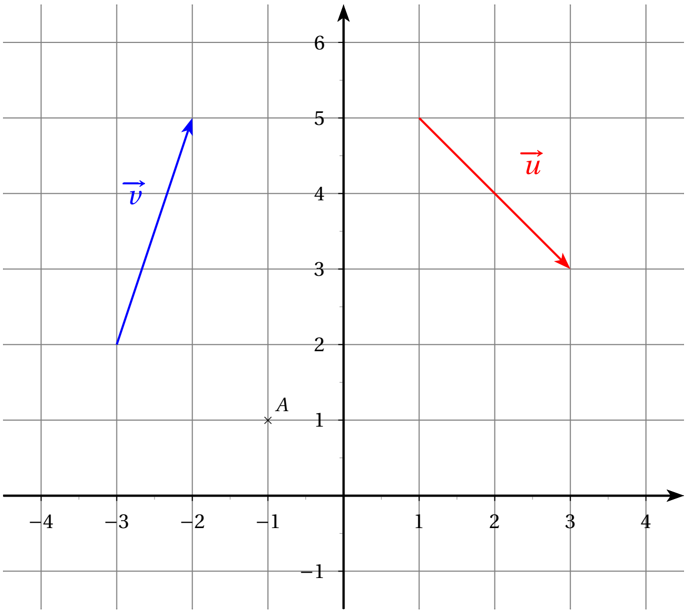
Parcours différenciés : Vecteurs et coordonnées

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

☞Exercice 1 ✧

Soit le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivant :



1. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs :

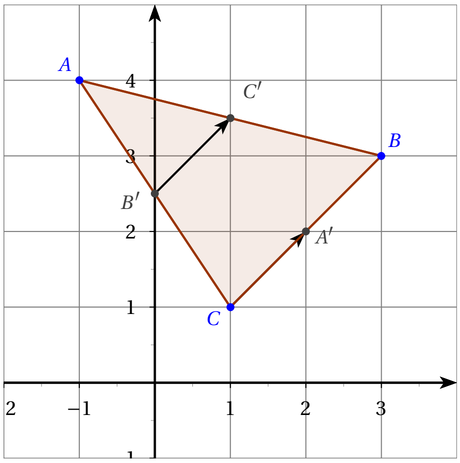
   (a) $\vec{u}+\vec{v}$ (b) $-\vec{u}+\vec{v}$ (c) $-\vec{u}-\vec{v}$ (d) $\dfrac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$ (e) $2\vec{u}+\vec{v}$

3. Avec la méthode de votre choix construire les vecteurs suivants d'origine le point A :

   (a) $\vec{u}+\vec{v}$ (b) $-\vec{u}+\vec{v}$ (c) $-\vec{u}-\vec{v}$ (d) $\dfrac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$ (e) $2\vec{u}+\vec{v}$

☞Exercice 2 ✧

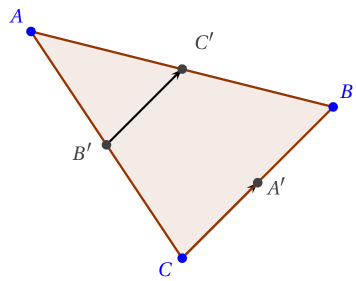
Soit le triangle ABC dans le repère orthonormé suivant et A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



1. Lire les coordonnées entières des points A, B et C.
2. Déterminer par le calcul, les coordonnées des points A', B' et C', vérifier graphiquement.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{CA'}$.
4. Que peut-on dire du quadrilatère $B'C'A'C$?

☞Exercice 3 ✧✧

Soit le triangle ABC du plan et le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



1. Lire les coordonnées entières des points A, B et C.
2. Déterminer par le calcul, les coordonnées des points A', B' et C', vérifier graphiquement.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{CA'}$.
4. Que peut-on dire du quadrilatère $B'C'A'C$?

☞Exercice 4 ✧

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, soit les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;\,1)$, $(3\,;\,0)$ et $(2\,;\,3)$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

☞Exercice 5 ✧

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthonormé on donne les points A, B, C, D, E et F de coordonnées respectives $(-2\,;\,3)$, $(2\,;\,5)$, $(1\,;\,3)$, $(3\,;\,4)$, $(1\,;\,4{,}5)$ et $(-3\,;\,2)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?
3. Est-ce que les points A, E et F sont alignés ? Justifier.

☞Exercice 6 ✧

$ABCD$ est un carré, les points E et F vérifient $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$.

1. Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.
2. Montrer que C est le milieu du segment $[EF]$.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

☞Exercice 7 ✧

Soit le triangle ABC dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ tels que A, B et C aient pour coordonnées respectives $(1\,;\,2)$, $(2\,;\,5)$ et $(4\,;\,3)$.
On construit le point I milieu du segment $[BC]$, le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, E et F.
2. Est-ce que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires ? Si oui que peut-on en déduire ?

☞Exercice 8 ✧✧

Soit le triangle ABC et le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

On construit le point I milieu du segment $[BC]$, le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, I, E et F.
2. Est-ce que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires ? Si oui que peut-on en déduire ?

☞Exercice 9 ✧✧✧

On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

ABC est un triangle tel que A, B et C ait pour coordonnées respectives, $(1\,;\,0)$, $\left(\dfrac{-1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{-1}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. Démontrer que le centre du cercle circonscrit du triangle ABC est le point O.
3. On construit les points E, F et G tels que E est le symétrique de A par rapport à B, F est le symétrique de B par rapport à C et G est le symétrique de C par rapport à A.
   Déterminer les coordonnées des points E, F et G et démontrer que EFG est équilatéral.
4. Démontrer que O est aussi le centre du triangle EFG.

☞**Exercice 10** ✧✧✧

ABC est un triangle, on se place dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

On construit le point E tel que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BC}$ et le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
Déterminer les coordonnées du point D intersection des droites (EF) et (AB).

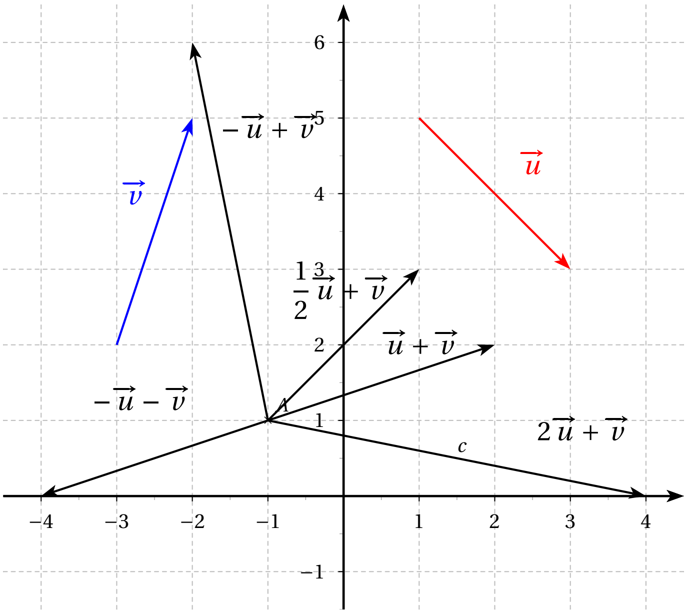
☞**Exercice 11** ✧✧✧

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$, soit les points A, B de coordonnées respectives $(1\,;\,2)$, $(3\,;\,1)$.
Déterminer les coordonnées du ou des points C du plan tels que ABC soit un triangle rectangle isocèle en A.

Correction

Exercice 1

Soit le repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivant :



1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. (a) $\vec{u}+\vec{v}$:
   $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 \\ -2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $-\vec{u}+\vec{v}$:
   $-\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

   (c) $-\vec{u}-\vec{v}$:
   $-\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-1 \\ 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

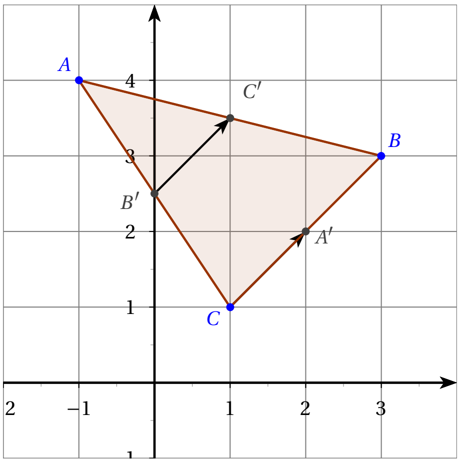
   (d) $\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$:
   $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (e) $2\vec{u}+\vec{v}$:
   $2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Pour la construction on peut utilise la construction des sommes de vecteurs et des produits par un nombre réel, ou directement à partir des coordonnées calculées précédemment. Exercez-vous aux deux méthodes.

☞**Exercice 2** ✧

Soit le triangle ABC dans le repère orthonormé suivant et A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



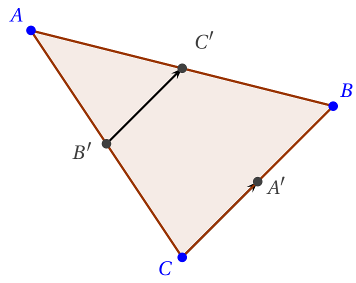
1. $A(-1\ ;\ 4)$; $B(3\ ;\ 3)$ et $C(1\ ;\ 1)$.
2. $A' : \left(\dfrac{3+1}{2}\ ;\ \dfrac{3+1}{2}\right) = (2\ ;\ 2)$

   $B' : \left(\dfrac{-1+1}{2}\ ;\ \dfrac{4+1}{2}\right) = (0\ ;\ 2,5)$

   $C' : \left(\dfrac{3+(-1)}{2}\ ;\ \dfrac{3+4}{2}\right) = (1\ ;\ 3,5)$
3. $\overrightarrow{B'C'}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 3,5-2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA'}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA'}$ donc $B'C'A'C$ est un parallélogramme.

☞Exercice 3 ✧✧

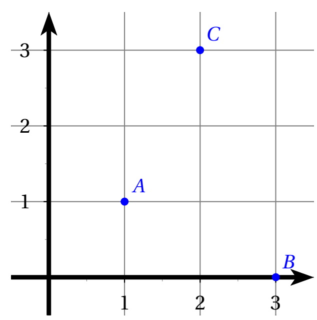
Soit le triangle ABC du plan et le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



1. $\overrightarrow{AA} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ donc A a pour cordonnées $(0\,;\,0)$.
   $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ donc B a pour cordonnées $(1\,;\,0)$.
   $\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$ donc C a pour cordonnées $(0\,;\,1)$.
2. $A' : \left(\dfrac{1+0}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\right) = (0,5\,;\,0,5)$
   graphiquement on a bien : $\overrightarrow{AA'} = 0,5\overrightarrow{AB} + 0,5\overrightarrow{AC}$.
   $B' : \left(\dfrac{0+0}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\right) = (0\,;\,0,5)$
   graphiquement on a bien : $\overrightarrow{AB'} = 0\overrightarrow{AB} + 0,5\overrightarrow{AC}$.
   $C' : \left(\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{0+0}{2}\right) = (0,5\,;\,0)$
   graphiquement on a bien : $\overrightarrow{AC'} = 0,5\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$.
3. $\overrightarrow{B'C'}\begin{pmatrix} 0,5-0 \\ 0-0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA'}\begin{pmatrix} 0,5-0 \\ 0,5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$.
4. $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA'}$ donc $B'C'A'C$ est un parallélogramme.

☞Exercice 4 ✧

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$, soit les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;\,1)$, $(3\,;\,0)$ et $(2\,;\,3)$.

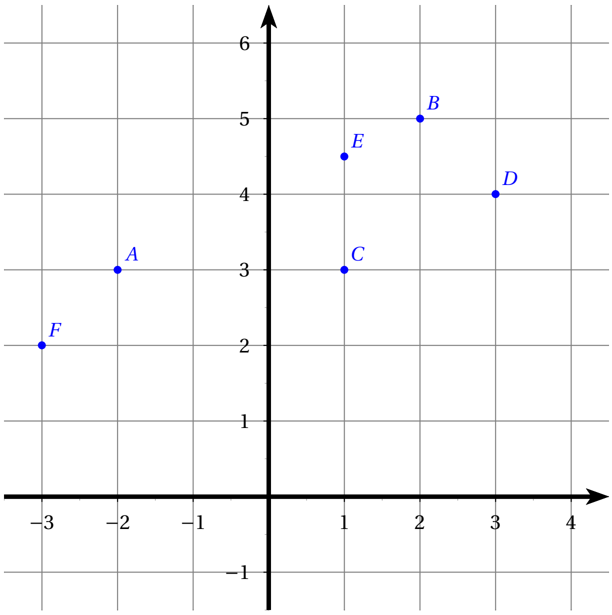


$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{5}$
$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
$AB = AC$ et $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (égalité de Pythagore)
Ainsi le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

☞**Exercice 5** ✧

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthonormé on donne les points A, B, C, D, E et F de coordonnées respectives $(-2\,;\,3)$, $(2\,;\,5)$, $(1\,;\,3)$, $(3\,;\,4)$, $(1\,;\,4{,}5)$ et $(-3\,;\,2)$.

Faire une figure à la main ou sur GeoGebra ne coûte pas rien et permet de se faire une idée des résultats.



1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Deux manières de prouver que les vecteurs sont colinéaires :

   - il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, ici $k = 2$
   - le calcul du déterminant suivant est nul :
     $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 2 \times 2 = 0$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On en déduit les directions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les mêmes, les droites (AB) et $CD)$ sont parallèles.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 1-2 \\ 4{,}5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

   Deux manières de prouver que les vecteurs sont colinéaires :

   - il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BE}$, ici $k = -4$
   - le calcul du déterminant suivant est nul :
     $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{BE}\right) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -0{,}5 \end{vmatrix} = 4 \times (-0{,}5) - 2 \times (-1) == -2 + 2 = 0$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires. On en déduit les directions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont les mêmes, les droites (AB) et (BE) sont parallèles.
   Ces deux droites parallèles ont aussi le point B en commun, ainsi (AB) et (BE) sont confondues, les points A, B et E sont alignés.

3. $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 4,5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -3-(-2) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Deux manières de prouver que les vecteurs ne sont pas colinéaires :

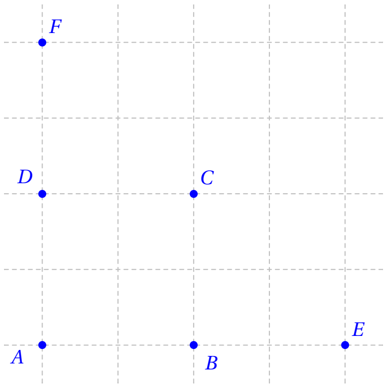
- il n'existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AF}$, on raisonne par l'absurde, si ce nombre k existe alors $k \times (-1) = 3$ d'après les abscisses des deux vecteurs, on obtient $k = -3$. On aboutit à une contradiction avec l'ordonnée des deux vecteurs : $(-3) \times (-1) \neq 1,5$.
  Le réel k n'existe pas.

- le calcul du déterminant suivant n'est pas nul :
  $\det\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AF}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1,5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 1,5 \times (-1) = -3 + 1,5 \neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit les directions des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas les mêmes, les droites (AE) et (AF) ne sont pas parallèles et les points A, E et F ne sont pas alignés.

☞Exercice 6 ✧

$ABCD$ est un carré, les points E et F vérifient $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$.



1. $\overrightarrow{AA} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc A a pour coordonnées $(0\,;\,0)$.
   $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc B a pour coordonnées $(1\,;\,0)$.
   $\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ donc C a pour coordonnées $(1\,;\,1)$.
   $\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ donc A a pour coordonnées $(0\,;\,1)$.
   $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc E a pour coordonnées $(2\,;\,0)$.
   $\overrightarrow{AF} = 0\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$ donc F a pour coordonnées $(0\,;\,2)$.

2. Le milieu du segment $[EF]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{2+0}{2}\,;\,\dfrac{0+2}{2}\right) = (1\,;\,1)$.
   Ces coordonnées sont celles du point C, C est donc le milieu du segment $[EF]$.

3. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
   Deux manières de prouver que les vecteurs sont colinéaires :

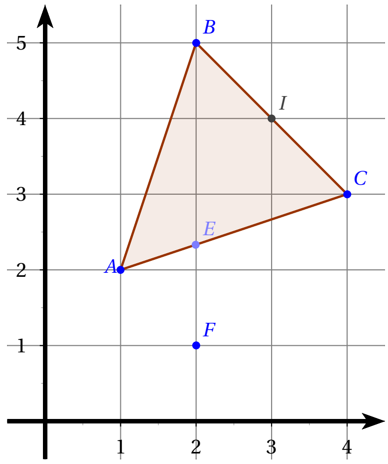
   - il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{EF}$, ici $k = 0,5$
   - le calcul du déterminant suivant est nul :
     $\det\left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{EF}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \times (2) - 1 \times (-2) = -2 + 2 = 0$

   Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. On en déduit les directions des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont les mêmes, les droites (BD) et (EF) sont parallèles.

☞**Exercice 7** ✧

Soit le triangle ABC dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ tels que A, B et C aient pour coordonnées respectives $(1\,;\,2)$, $(2\,;\,5)$ et $(4\,;\,3)$.

On construit le point I milieu du segment $[BC]$, le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.



1. $I : \left(\dfrac{2+4}{2}\,;\,\dfrac{5+3}{2}\right) = (3\,;\,4)$.

   $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E - 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E - 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

   Ainsi E a pour coordonnées $(x_E\,;\,y_E) = \left(1+1\,;\,\dfrac{1}{3}+2\right) = \left(2\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$.

   $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_F - 1 \\ y_F - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_F - 1 \\ y_F - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Ainsi F a pour coordonnées $(x_F\,;\,y_F) = (1+1\,;\,-1+2) = (2\,;\,1)$

2. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 2-2 \\ \dfrac{7}{3} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{8}{3} \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 2-2 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

   Deux manières de prouver que les vecteurs sont colinéaires :

   - il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BF}$, ici $k = \dfrac{2}{3}$
   - le calcul du déterminant suivant est nul :

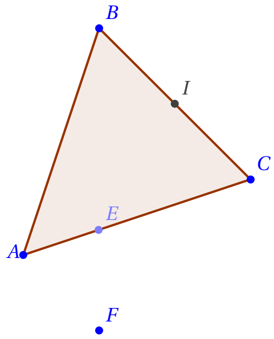
     $\det\left(\overrightarrow{BE}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{-8}{3} & -4 \end{vmatrix} = 0 \times (-4) - 0 \times \dfrac{-8}{3} = 0$

   Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. On en déduit les directions des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont les mêmes, les droites (BE) et (BF) sont parallèles, elles ont un point commun donc les points B, E et F sont alignés.

☞**Exercice 8** ✧✧

Soit le triangle ABC et le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

On construit le point I milieu du segment $[BC]$, le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.



1. $A : (0\ ;\ 0)$; $B(1\ ;\ 0)$; $C(0\ ;\ 1)$
   $I : \left(\dfrac{1+0}{2}\ ;\ \dfrac{0+1}{2}\right) = (0,5\ ;\ 0,5)$.
   $\overrightarrow{AE} = 0\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
   Ainsi E a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.
   $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_F - 0 \\ y_F - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5-1 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.
   Ainsi F a pour coordonnées $(x_F\ ;\ y_F) = (-0,5\ ;\ 0,5)$.

2. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 0-1 \\ \dfrac{1}{3}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}-1 \\ \dfrac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$
   Deux manières de prouver que les vecteurs sont colinéaires :

   - il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BF}$, ici $k = \dfrac{2}{3}$
   - le calcul du déterminant suivant est nul :
     $\det\left(\overrightarrow{BE}\ ;\ \overrightarrow{BF}\right) = \begin{vmatrix} -1 & \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -1 \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{-3}{2} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2}$

   Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. On en déduit les directions des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont les mêmes, les droites (BE) et (BF) sont parallèles, elles ont un point commun donc les points B, E et F sont alignés.