Parcours différenciés : Variations d'une fonction

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

☞Exercice 1 ✧

1. f est une fonction croissante sur $[1\ ;\ 3]$, donner l'ordre entre $f(1)$ et $f(3)$.

2. g est une fonction décroissante sur $[1\ ;\ 3]$, donner l'ordre entre $g(1)$ et $g(3)$.

☞Exercice 2 ✧

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & [-1\ ;\ 3] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \end{array}$$

On admet que la fonction f admet deux et seulement quatre valeurs extrêmes locales en -1, 0, 2 et 3.
Après avoir calculer l'image de chacune de ces quatre valeurs, construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
Choisir une fenêtre adaptée pour tracer la courbe de la fonction f sur la calculatrice.

☞Exercice 3 ✧

On donne le tableau de variations d'une fonction f.

x	-5		-1		2		5
f	0	↗	5	↘	-1	↗	0

1. Comparer si possible :

   (a) $f(-1)$ et $f(1)$ (b) $f(0)$ et $f(3)$ (c) $f(-3)$ et $f(-2)$ (d) $f(-3)$ et $f(4)$

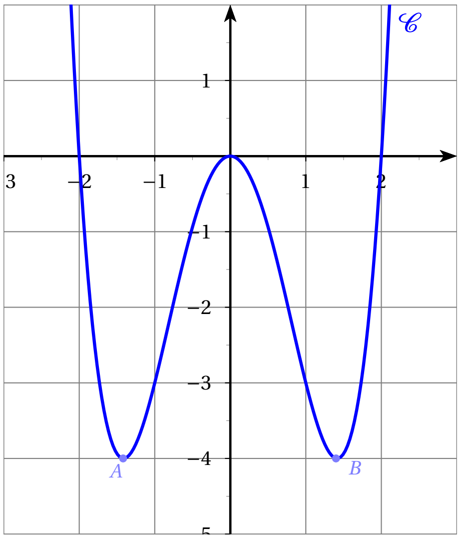
2. On admet que $f(-0,5) = 0$ (l'image de $-0,5$ est 0), à l'aide du tableau de variations de la fonction f, construire le tableau de signe de la fonction f.

☞**Exercice 4** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^4 - 4x^2 \end{array}$$

On donne la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère orthogonal suivant :



Les points A et B ont pour abscisse respective $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, ils sont des sommets locaux de la courbe, la courbe admet aussi un sommet local en 0.

1. Calculer l'image de $-\sqrt{2}$, puis de $\sqrt{2}$ par f.
2. À partir d'une lecture graphique, construire le tableau de variations de la fonction f.
3. Montrer que pour tous réels x, $f(x) = x^2(x-2)(x+2)$.
4. Déterminer le tableau de signe de f, vérifier graphiquement votre résultat, puis donner les solutions de l'équation $f(x) > 0$.

☞**Exercice 5** ✧

Soit f et g deux fonctions affines

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 3x - 1 \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = -2x + 5 \end{array}$$

1. Pour établir les variations de la fonction f, on choisit deux réels a et b tels que $a < b$ et on souhaite comparer $f(a)$ et $f(b)$ avec l'algorithme de calcul suivant :

   Comparer $3a$ et $3b$

   Comparer $3a - 1$ et $3b - 1$

   Donner l'ordre entre $f(a)$ et $f(b)$.

   Appliquer l'algorithme, puis donner le sens de variations de la fonction f.
2. De la même manière que la question précédente, pour déterminer le sens de variations de la fonction g, on choisit deux réels a et b tels que $a < b$.
   Donner l'algorithme qui permet de faire les étapes de calculs pour déterminer l'ordre entre $g(a)$ et $g(b)$, appliquer l'algorithme puis déterminer le sens de variations de la fonction g.
3. Représenter dans un repère orthogonal les courbes des fonctions f et g. Vérifier le sens de variation trouvé précédemment.

Correction

Exercice 1

1. f est une fonction croissante sur $[1\,;\,3]$ et $1 < 3$ donc $f(1) < f(3)$.

2. g est une fonction décroissante sur $[1\,;\,3]$ et $1 < 3$ donc $g(1) > g(3)$.

Exercice 2

$$\begin{array}{rccl} f: & [-1\,;\,3] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \end{array}$$

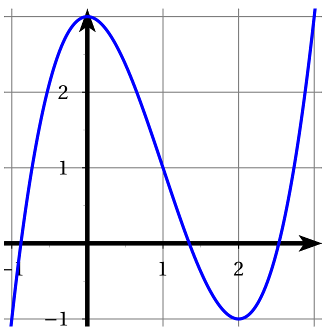
$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 3 = -1 - 3 + 3 = -1$
$f(0) = (0)^3 - 3 \times (0)^2 + 3 = 3$
$f(2) = (2)^3 - 3 \times (2)^2 + 3 = 8 - 12 + 3 = -1$
$f(3) = (3)^3 - 3 \times (3)^2 + 3 = 3^3 - 3^3 + 3 = 3$

x	-1		0		2		3
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

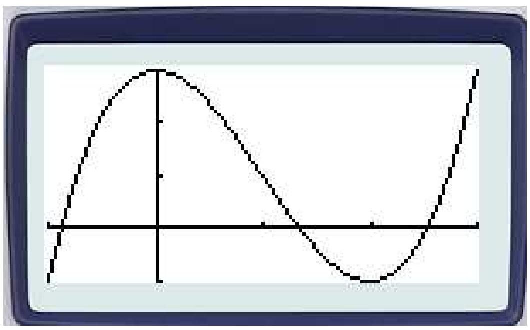
Sur la calculatrice, on peut vérifier avec la fenêtre graphique suivante :

X_{min}	-1	Y_{min}	-1
X_{max}	3	Y_{max}	3
Échelle X	1	Échelle Y	1

GeoGbra



Calculatrice



☞**Exercice 3** ✧

On donne le tableau de variations d'une fonction f.

x	-5		-1		2		5
f	0	↗	5	↘	-1	↗	0

1. Comparer si possible :

   (a) $f(-1)$ et $f(1)$:
   $-1 \in [-1\,;\,2]$ et $1 \in [-1\,;\,2]$.
   On peut aussi dire que $f(-1)$ est le maximum, et 5 n'est atteint qu'en -1, de f donc $f(-1) > f(1)$.
   Sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$, f est strictement décroissante et $-1 < 1$ donc $f(-1) > f(1)$.

   (b) $f(0)$ et $f(3)$:
   $0 \in [-1\,;\,2]$ et $f(0) \in [-1\,;\,5]$; $3 \in [2\,;\,5]$ et $f(3) \in [-1\,;\,0]$
   On ne peut rien conclure sur l'ordre de $f(0)$ et $f(3)$.

   (c) $f(-3)$ et $f(-2)$:
   $-3 \in [-5\,;\,-1]$ et $-2 \in [-5\,;\,-1]$.
   Sur l'intervalle $[-5\,;\,-1]$, f est strictement croissante et $-3 < -2$ donc $f(-3) < f(-2)$.

   (d) $f(-3)$ et $f(4)$:
   $-3 \in [-5\,;\,-1]$, sur cet intervalle f est croissante et $f(-5) = 0$ donc $f(-3) > 0$.
   $4 \in [2\,;\,5]$, sur cet intervalle f est croissante et $f(5) = 0$ donc $f(4) < 0$.
   Ainsi $f(4) < 0 < f(-3)$.

2. On admet que $f(-0,5) = 0$ (l'image de $-0,5$ est 0)

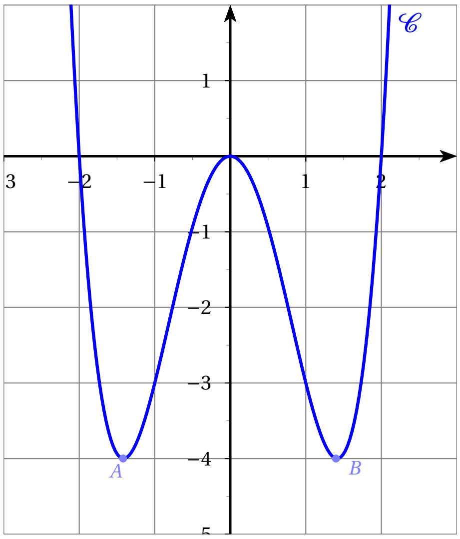
x	-5		-0.5		5
f	0	$+$	0	$-$	0

☞**Exercice 4** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^4 - 4x^2 \end{array}$$

On donne la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f dans le repère orthogonal suivant :



1. $f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4 \times (-\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4 \times 2 = -4$
   $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4 \times (\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4 \times 2 = -4.$
   $f(0) = 0^4 - 4 \times 0^2 = 0$

2. Tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f		↘	-4	↗	0	↘	-4	↗	

3. Deux méthodes sont possibles, en factorisant : $f(x) = x^4 - 4x^2 = (x^2 - 2x)(x^2 + 2x) = x(x-2) \times x(x+2) = x^2(x-2)(x+2)$.
   Ou en développant :
   $x^2(x-2)(x+2) = x^2(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 = f(x)$.

4. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ et $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.
   $x - 2 > 0 \Longleftrightarrow x > 2$; $x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$ et $x + 2 > 0 \Longleftrightarrow x > -2$; $x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in -\infty\,;\,0[\cup]2\,;\,+\infty[$.

☞**Exercice 5** ✧

Soit f et g deux fonctions affines

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 3x - 1 \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = -2x + 5 \end{array}$$

1. comparer $3a$ et $3b$

   comparer $3a - 1$ et $3b - 1$

   donner l'ordre entre $f(a)$ et $f(b)$.

   $a < b \Rightarrow 3a < 3b \Rightarrow 3a - 1 < 3b - 1 \Rightarrow f(a) < f(b)$.

   $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

2. comparer $-2a$ et $-2b$

   comparer $-2a + 5$ et $-2b + 5$

   donner l'ordre entre $g(a)$ et $g(b)$.

   $a < b \Rightarrow -2a > -2b \Rightarrow -2a + 5 > -2b + 5 \Rightarrow g(a) > g(b)$.

   $a < b \Rightarrow g(a) > g(b)$ donc g est strictement décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
g	$\searrow$	

3. Pour représenter une fonction affine, par une droite, on fait une table de valeurs de trois points sur l'intervalle $[-1 ; 3]$ par exemple (on peut choisir $x = -1$; $x = 1$; $x = 3$ et calculer leur image respective par f puis g).

4.