☙ Parcours différenciés : Probabilités ❧

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégies d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

☞Exercice 1 ✧

On lance trois fois une pièce de monnaie. On note la face obtenue à chaque lancé.

1. À l'aide d'un arbre donner l'univers, soit tous les résultats possibles.
2. On admet qu'il y a équiprobabilité des événements élémentaires de l'univers (la pièce de monnaie n'est pas truquée et elle est bien équilibrée).
   Quelle est la probabilité p d'un événement élémentaire de l'univers ?
3. Donner les éléments qui composent l'événement A : « obtenir au moins une fois PILE » ; puis calculer sa probabilité de deux manières.
4. Donner les éléments qui composent l'événement B : « obtenir au plus une fois PILE » ; puis calculer sa probabilité.
5. Décrire l'événement $A \cap B$, puis donner les éléments qui composent $A \cap B$. Déterminer la probabilité de $A \cap B$.
6. Décrire l'événement $A \cap B$, puis donner les éléments qui composent $A \cap B$. Déterminer la probabilité de $A \cap B$ de deux manières.

☞Exercice 2 ✧

Un audioprothésiste compte parmi ses 600 clients 75 % de personnes âgées de plus de 50 ans. Parmi celles-ci, 80 % souffrent de problèmes d'audition aux deux oreilles. Ce taux est de 40 % parmi les clients de moins de 50 ans. On choisit au hasard le dossier médical d'un client; chaque dossier a la même probabilité d'être choisi. Pour tout événement E, on note $\overline{E}$ l'événement contraire de E. On considère les événements suivants :

- A : « le client est âgé de plus de 50 ans »;
- D : « le client souffre de problèmes auditifs aux deux oreilles »

1. Faire un tableau croisé des effectifs en indiquant en marges les totaux des lignes et des colonnes.
2. Calculer la probabilité de l'événement A et la probabilité de l'événement D.
3. Décrire par une phrase l'événement $A \cap D$, puis calculer sa probabilité.
4. Décrire par une phrase l'événement $A \cap D$, puis calculer sa probabilité de deux manières.

☞Exercice 3 ✧

Un groupe de personnes parlent anglais ou espagnol.
La probabilité qu'une personne parle espagnol est 0,5 ; la probabilité qu'une personne parle anglais est 0,9 et la probabilité qu'une personne ne parle que l'anglais est 0,3.
On note E l'événement « la personne parle espagnol » et A l'événement « la personne parle anglais ».

1. Faire un diagramme de Venn de la situation.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne parle anglais et espagnol.
3. Déterminer la probabilité qu'une personne parle anglais ou espagnol.

☞Exercice 4 ✧

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules bleues, ces boules sont indiscernables au touché.

1. Deux tirages avec remise : un joueur tire une boule de l'urne, note sa couleur, la remet dans l'urne, tire une boule et note sa couleur.
   (a) Faire un arbre de dénombrement de la situation et donner le nombre d'élément de l'univers Ω.
   (b) Calculer la probabilité p_0 d'obtenir aucune boule rouge.
   (c) Calculer la probabilité p_1 d'obtenir exactement une boule rouge.
   (d) Calculer la probabilité p_2 d'obtenir exactement deux boules rouges.
   (e) Que vaut $p_0 + p_1 + p_2$? Est-ce normal ?
2. Deux tirages sans remise : un joueur tire une boule de l'urne, note sa couleur, à nouveau, il tire une boule et note sa couleur.
   (a) Faire un arbre de dénombrement de la situation et donner le nombre d'élément de l'univers Ω.
   (b) Calculer la probabilité p_0 d'obtenir aucune boule rouge.
   (c) Calculer la probabilité p_1 d'obtenir exactement une boule rouge.
   (d) Calculer la probabilité p_2 d'obtenir exactement deux boules rouges.
   (e) Que vaut $p_0 + p_1 + p_2$? Est-ce normal ?
3. Dans quelle situation (tirage avec remise ou tirage sans remise) a-t-on le plus de chance d'obtenir au moins une boule rouge ? Justifier.

☞Exercice 5 ✧✧

Une étude montre qu'un adolescent sur trois possède une télévision dans sa chambre et un sur cinq un ordinateur. 60% ded adolescents ne possède ni télévision, ni ordinateur dans sa chambre.
Déterminer la probabilité pour qu'un adolescent ait une télévision et un ordinateur dans sa chambre.
Aide : organiser vos données et ça devient facile !

☞Exercice 6 ✧✧✧

Dans une lointaine planète vivent les verts et les bleus : 85% des bleus sont pauvres et 90% des pauvres sont bleus. On choisit un individu au hasard et on notera x la probabilité que cet individu ne soit pas pauvre et vert, avec $x \in [0\,;\,1]$.

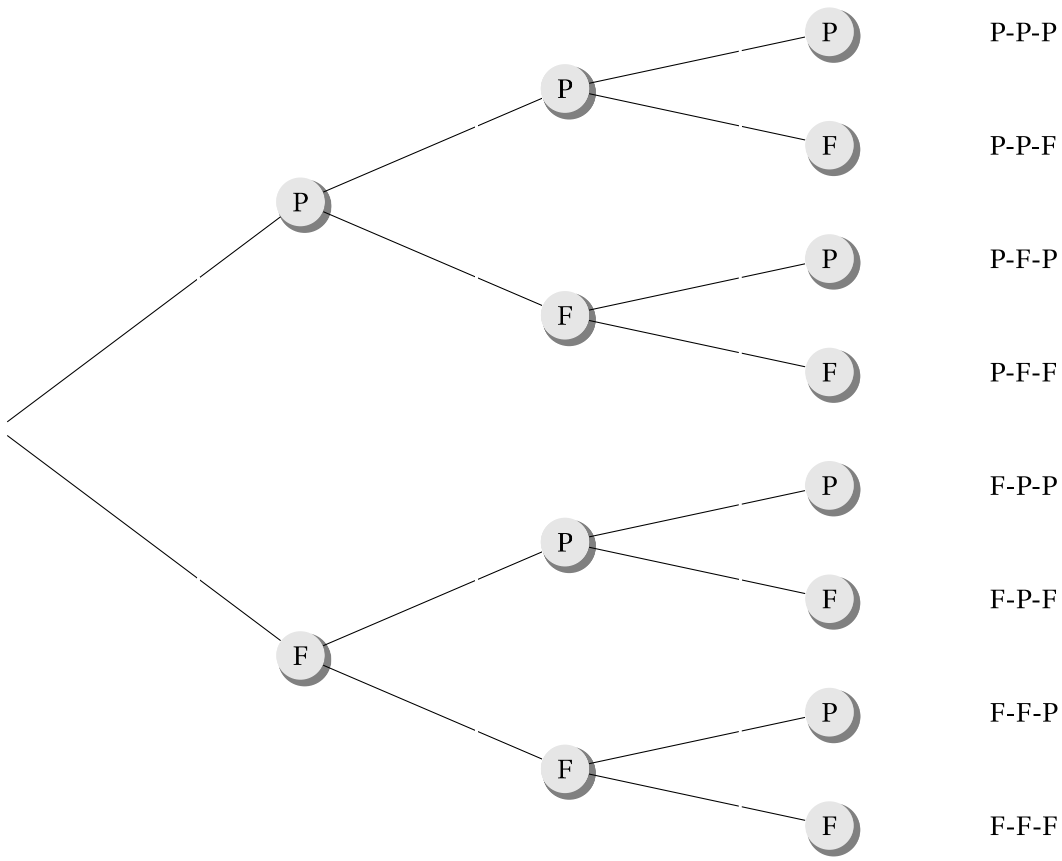
1. Déterminer en fonction de x, la probabilité $p(x)$ d'être pauvre sur cette planète ? Vous pourrez faire un tableau croisé pour déterminer les probabilités de la situation en fonction de x, en particulier $p(x)$.
2. Étudier les variations de $p(x)$ sur $[0\,;\,1]$. Dresser le tableau de variation de p.

Correction

Exercice 1

On lance trois fois une pièce de monnaie. On note la face obtenue à chaque lancé.

1. Arbre :



2. $\Omega = \{(PPP);(PPF);(PFP);(PFF);(FPP);(FPF);(FFP);(FFF)\}$.
   $p = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{8} = 0,125$.
3. $A = \{(PPP);(PPF);(PFP);(PFF);(FPP);(FPF);(FFP)\}$
   $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{7}{8}$
   $\overline{A} = \{(FFF)\}$
   $P(\overline{A}) = \dfrac{|\overline{A}|}{|\Omega|}\dfrac{1}{8}$ et $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{7}{8}$.
4. $B = \{(PFF);(FPF);(FPP);(FFF)\}$.
   $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.
5. $A \cap B$ est l'événement « obtenir une moins une fois pile ET obtenir au plus une fois pile ».
   $A \cap B = \{(PFF);(FPF);(FPP)\}$.
   $P(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \dfrac{3}{8}$.
6. $A \cup B$ est l'événement « obtenir une moins une fois pile OU obtenir au plus une fois pile ».
   $A \cup B = \Omega$.
   $P(A \cup B) = 1$.
   On peut aussi calculer par $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{7}{8} + \dfrac{4}{8} - \dfrac{3}{8} = 1$

☞Exercice 2 ✧

Un audioprothésiste compte parmi ses 600 clients 75 % de personnes âgées de plus de 50 ans. Parmi celles-ci, 80 % souffrent de problèmes d'audition aux deux oreilles. Ce taux chute à 40 % parmi les clients de moins de 50 ans. On choisit au hasard le dossier médical d'un client; chaque dossier a la même probabilité d'être choisi. Pour tout événement E, on note $\overline{E}$ l'événement contraire de E. On considère les événements suivants :

- A : « le client est âgé de plus de 50 ans »;
- D : « le client souffre de problèmes auditifs aux deux oreilles »

1. Tableau :

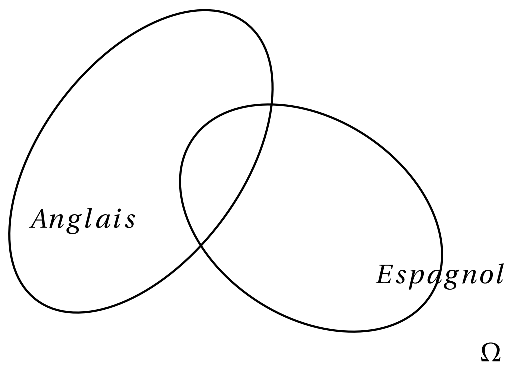
	A	$\overline{A}$	Total
D	$360\ (450\times 80\%)$	$60\ (150\times 40\%)$	$420\ (360+60)$
$\overline{D}$	$90\ (450-360)$	$90\ (150-60)$	$180\ (90+90)$
Total	$450\ (600\times 75\%)$	$150\ (600-450)$	600

2. On est dans un cas d'équiprobabilité :
   $P(A)=0,75$ (d'après le sujet) et $P(D)=\dfrac{|D|}{|\Omega|}=\dfrac{420}{600}=\dfrac{7}{10}=0,7$
3. $A\cap D$: « le patient est âgé de plus de 50 ans ET il souffre de problèmes auditifs au deux oreilles ».
   $P(A\cap D)=\dfrac{|A\cap D|}{|\Omega|}=\dfrac{360}{600}=\dfrac{3}{5}=0,6.$
4. $A\cup D$: « le patient est âgé de plus de 50 ans OU il souffre de problèmes auditifs au deux oreilles ».
   Tous les calculs suivants sont possibles :
   - $P(A\cup D)=\dfrac{|A\cup D|}{|\Omega|}=\dfrac{360+60+90}{600}=\dfrac{510}{600}=0,85,$
     ce calcul correspond à $P(A\cup D)=P(A\cap D)+P(A\cap\overline{D})+P(\overline{A}\cap D)$.
   - $P(A\cup D)=\dfrac{|A\cup D|}{|\Omega|}=\dfrac{600-90}{600}=\dfrac{510}{600}=0,85,$
     ce calcul correspond à $P(A\cup D)=P(\Omega)-P(\overline{A\cup D})=1-p(\overline{A}\cap\overline{D})=1-\dfrac{90}{600}=0,85.$
   - $P(A\cup D)=\dfrac{|A\cup D|}{|\Omega|}=\dfrac{420+450-360}{600}=\dfrac{510}{600}=0,85,$
     ce calcul correspond à $P(A\cup B)=p(A)+p(B)-P(A\cap B)=0,75+0,7-0,6=0,85.$

☞Exercice 3 ✧

Un groupe de personnes parlent anglais ou espagnol.
La probabilité qu'une personne parle espagnol est 0,5 ; la probabilité qu'une personne parle anglais est 0,9 et la probabilité qu'une personne ne parle que l'anglais est 0,3.
On note E l'événement « la personne parle espagnol » et A l'événement « la personne parle anglais ».

1. Diagramme :



2. $P(A \cap E) = P(A) - P(A \cap \overline{E}) = 0,9 - 0,3 = 0,6$

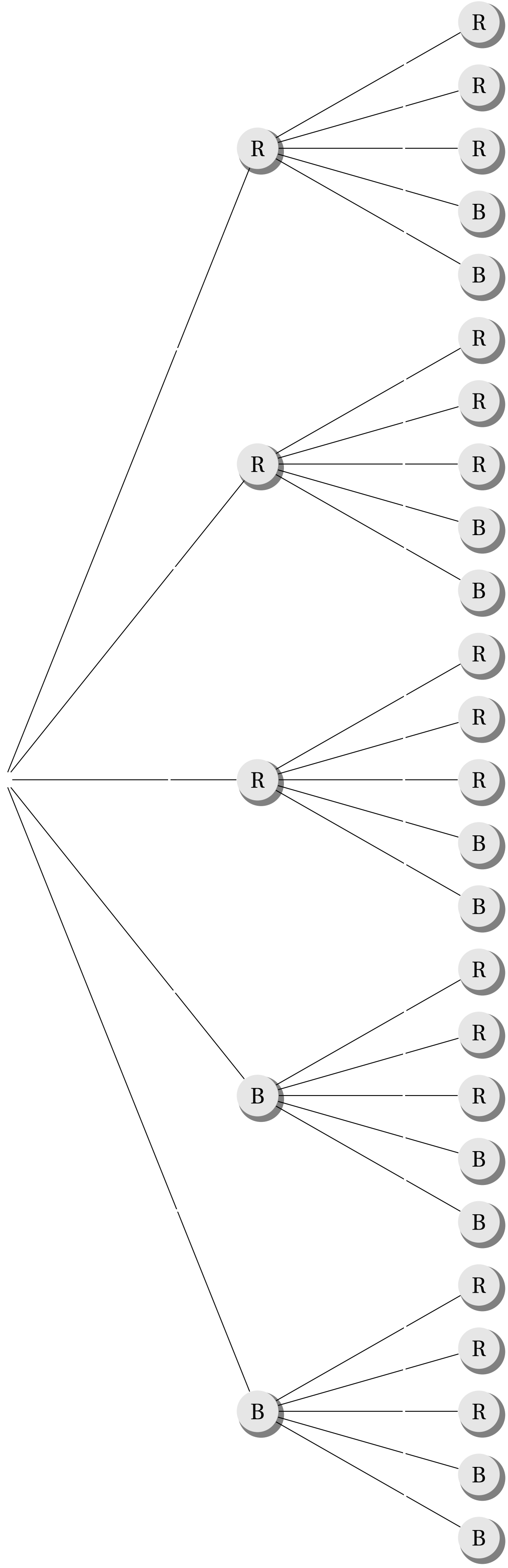
3. $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = 0,9 + 0,5 - 0,6 = 0,8$

☞**Exercice 4** ✧

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules bleues, ces boules sont indiscernables au touché.

1. Deux tirages avec remise : un joueur tire une boule de l'urne, note sa couleur, la remet dans l'urne, tire une boule et note sa couleur.

   (a) Arbre :



L'univers possède 5×5 soit 25 événements élémentaires

(b) $p_0 = \dfrac{4}{25}$ (4 chemins de l'arbre correspondent à l'événement)

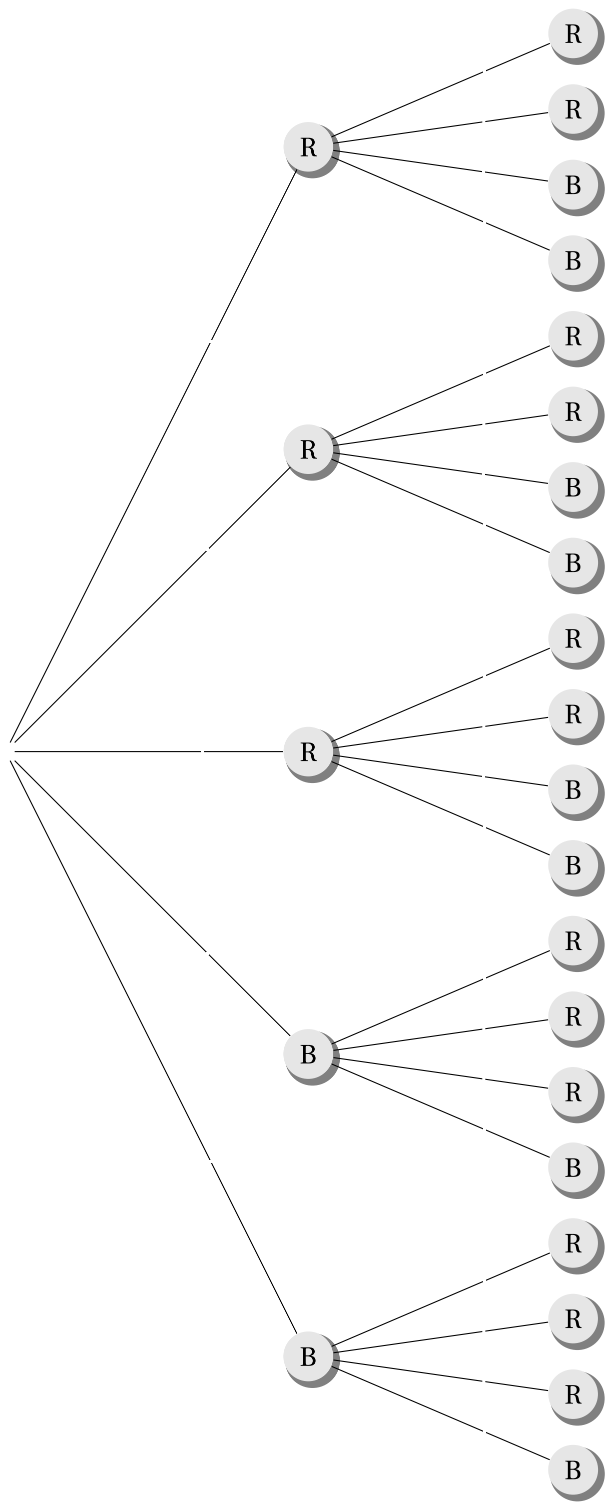
(c) $p_1 = \dfrac{12}{25}$ (12 chemins de l'arbre correspondent à l'événement)

(d) $p_2 = \dfrac{9}{25}$ (9 chemins de l'arbre correspondent à l'événement)

(e) $p_0 + p_1 + p_2 = \dfrac{4+12+9}{25} = 1$
Il s'agit de la probabilité de l'univers car les trois événements sont disjoints et ils forment l'univers.

2. Deux tirages sans remise : un joueur tire une boule de l'urne, note sa couleur, à nouveau, il tire une boule et note sa couleur.

(a) Arbre :



L'univers possède 5×4 soit événements élémentaires.

(b) $p_0 = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1.$

(c) $p_1 = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} = 0,6.$

(d) $p_2 = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3.$

(e) $p_0 + p_1 + p_2 = \dfrac{2+12+6}{20} = 1$
Il s'agit de la probabilité de l'univers car les trois événements sont disjoints et ils forment l'univers.

3.
- Tirage avec remise : $p_1 + p_2 = \dfrac{21}{25} = \dfrac{42}{50}$
- Tirage sans remise : $p_1 + p_2 = \dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10} = \dfrac{45}{50}$

Le tirage sans remise est plus avantageux car la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est supérieure.

☞**Exercice 5** ✧✧

Une étude montre qu'un adolescent sur trois possède une télévision dans sa chambre et un sur cinq un ordinateur. 60% des adolescents ne possèdent ni télévision, ni ordinateur dans sa chambre.
Déterminer la probabilité pour qu'un adolescent ait une télévision et un ordinateur dans sa chambre.
Aide : organiser vos données et ça devient facile !
On peut organiser les données dans un tableau (ou un diagramme de Venn) :

	T	$\overline{T}$	Total
O	$\frac{2}{15}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\right)$	$\frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}-\frac{6}{10}\right)$	$\frac{1}{5}$
$\overline{O}$	$\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}-\frac{6}{10}\right)$	$60\% = 0,6$	$\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)$	1

Par lecture on trouve la probabilité qu'un adolescent ait un ordinateur et une télévision égale à $\dfrac{2}{15}$.

☞**Exercice 6** ✧✧✧

Dans une lointaine planète vivent les verts et les bleus : 85% des bleus sont pauvres et 90% des pauvres sont bleus. On choisit un individu au hasard et on notera x la probabilité que cet individu soit bleu avec $x \in [0\,;\,1]$.

1. Déterminer en fonction de x, la probabilité $p(x)$ d'être pauvre sur cette planète ? Vous pourrez faire un tableau croisé pour déterminer les probabilités de la situation en fonction de x, en particulier $p(x)$.

2. Étudier les variations de $p(x)$. Dresser le tableau de variation de p.