Parcours différenciés : Nombres et équations

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réaliser (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

I. Résolution d'équations

Exercice 1 ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. (a) $5x=-1$ (b) $-2x-4=0$ (c) $1,4-1,4x=7x$ (d) $\dfrac{x}{2}+1=x-5$
2. Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si au moins un des deux facteurs est nul.
   Exemple : $(x+3)(x-1)=0$ si et seulement si $x+3=0$ ou $x-1=0$ soit $x=-3$ ou $x=1$.
   L'équation $(x+3)(x-1)=0$ admet deux solutions réelles, les nombres -3 et 1.

   (a) $(2x-3)(-4x+1)=0$. (b) $x(9x+1)=0$ (c) $2x(7x-5)=0$

Exercice 2 ✧✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. (a) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{12}$ (b) $\dfrac{-2}{x}=\dfrac{4}{3}$ (c) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{x}{6}$ (d) $\dfrac{1}{x}+1=3$
2. (a) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+3}{4}=1$ (b) $x(5x+2)=(5x-1)(x+1)$

II. Ensemble de nombres et intervalles

Exercice 3 ✧

1. Donner tous les entiers naturels de $\mathbb{N}$ qui appartiennent à l'intervalle $[-5\,;\,4]$.
2. Donner tous les entiers relatifs de $\mathbb{Z}$ qui appartiennent à l'intervalle $]-5\,;\,4[$.
3. Donner tous les nombres décimaux de la forme $\dfrac{a}{10^2}$, avec $a\in\mathbb{Z}$ qui appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,0,1]$.

Exercice 4 ✧✧

Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ensemble $]0\,;\,1[\cap]0,5\,;\,+\infty[$ est l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$.
2. Si $x<0$ et $x>-1$ alors $x\in]-1\,;\,0[$.
3. Si $x\in]-\infty\,;\,0]\cap[0\,;\,+\infty[$ alors $x=0$.

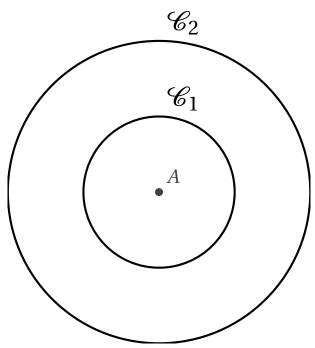
III. Problèmes

☞Exercice 5 ✧

Sur le site Wikipédia on peut lire :

Un terrain de football est un terrain sur lequel est organisée une partie de football. Ses caractéristiques sont définies par la loi 1 du football.
Selon les lois du jeu qui le définissent, le terrain est un rectangle de longueur comprise entre 90 et 120 mètres (100 à 130 yards, l'unité originellement utilisée dans les lois du jeu) et de largeur comprise entre 45 et 90 mètres (50 à 100 yards), soit une surface qui varie de 4 050 m^2 à 10 800 m^2 . Pour les matchs internationaux, il mesure environ 105 mètres sur 68 mètres soit une surface d'environ 7 000 m^2. Il peut être de plusieurs revêtements : pelouse naturelle ou synthétique, graviers, terre.
Justifier les résultats annoncés.

☞Exercice 6 ✧✧



Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont pour centre le point A et pour rayon respectif 1 cm et 2 cm.

1. Combien de cercle de centre A peut-on construire entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$? On note $\mathscr{E}$ l'ensemble de ces cercles.
2. Préciser l'intervalle dans lequel varie le périmètre des cercles de l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. Préciser l'intervalle dans lequel varie la surface des cercles de l'ensemble $\mathscr{E}$.
4. Justifier si le cercle de centre A de périmètre $6,2832$ cm est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.

☞Exercice 7 ✧✧✧

Ensemble de Cantor (mathématicien allemand 1845 - 1918) :
On considère l'intervalle $K_0 = [0\,;\,1]$.
On partage cet intervalle en trois parties égales et on retire l'intervalle ouvert centrale $\left]\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right[$, il reste l'ensemble $K_1 = \left[0\,;\,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}\,;\,1\right]$.
Pour passer à K_2 on retire à chacun des segments qui forment K_1 un intervalle ouvert central d'amplitude $\frac{1}{9}$. On obtient une réunion de 4 segments disjoints, chacun de longueur $\frac{1}{9}$, précisément : $\left[0\,;\,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}\,;\,\frac{3}{9}\right]$, $\left[\frac{6}{9}\,;\,\frac{7}{9}\right]$ et $\left[\frac{8}{9}\,;\,\frac{9}{9}\right]$, avec $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ et $\frac{9}{9} = 1$.

1. Sur trois axes des abscisses différents mais de même échelle, représenter les ensembles K_0, K_1 et K_2.
2. Déterminer $K_0 \cap K_1$, puis $K_1 \cap K_2$ puis $K_0 \cap K_1 \cap K_2$.
3. Déterminer l'ensemble K_3.

Correction

Exercice 1 ✧

1. (a) $x=-\dfrac{1}{5}$ (b) $x=-2$ (c) $x=\dfrac{1}{6}$ (d) $x=12$
2. (a) $x=\dfrac{3}{2}$; $x=\dfrac{1}{4}$ (b) $x=0$; $x=\dfrac{-1}{9}$ (c) $x=0$; $x=\dfrac{5}{7}$

Exercice 2 ✧✧

1. (a) $x=\dfrac{1}{4}$ (b) $x=\dfrac{-3}{2}$ (c) $x=6$ (d) $x=\dfrac{1}{2}$
2. (a) $x=\dfrac{1}{3}$ (b) $x=\dfrac{1}{2}$

Exercice 3 ✧

1. 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.
2. -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.
3. $0,01=\dfrac{1}{10^2}$; $0,02=\dfrac{2}{10^2}$; $0,03=\dfrac{3}{10^2}$; $0,04=\dfrac{4}{10^2}$; $0,05=\dfrac{5}{10^2}$; $0,06=\dfrac{6}{10^2}$; $0,07=\dfrac{7}{10^2}$; $0,08=\dfrac{8}{10^2}$; $0,09=\dfrac{9}{10^2}$; $0,1=\dfrac{10}{10^2}$.

Exercice 4 ✧✧

1. L'ensemble $]0\,;\,1[\cap]0,5\,;\,+\infty[$ est l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$: Faux, $0,1$ est un nombre de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ mais il n'est pas dans l'intersection des intervalles $]0\,;\,1[$ et $]0,5\,;\,+\infty[$ puisqu'il n'appartient pas à l'intervalle $]0,5\,;\,+\infty[$.
2. Si $x<0$ et $x>-1$ alors $x\in]-1\,;\,0[$: vrai, on a $-1<x<0$ qui est par définition l'intervalle $]-1\,;\,0[$.
3. Si $x\in]-\infty\,;\,0]\cap[0\,;\,+\infty[$ alors $x=0$: vrai : 0 est l'unique nombre commun aux deux intervalles.

Exercice 5 ✧

Soient L la longueur d'un terrain et l sa largeur.
On choisit l'unité de mesure le mètre.
Si $90\leqslant L\leqslant 120$ et $45\leqslant l\leqslant 90$ alors $90\times 45\leqslant Ll\leqslant 120\times 90$ soit $4\,050\leqslant Ll\leqslant 10\,800$.
Pour un terrain de jeux de matchs internationaux : $105\times 68=7140$. La valeur annoncée est arrondie à la centaine.

Exercice 6 ✧✧

1. Il y a une infinité de cercle dans l'ensemble $\mathscr{E}$ car il y a une infinité de rayon (nombre réel) dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.
2. Soit r le rayon et $\mathscr{P}$ le périmètre d'un cercle de l'ensemble $\mathscr{E}$.
   On a $1\leqslant r\leqslant 2$ ainsi $2\pi\leqslant p\leqslant 4\pi$.
3. Soit r le rayon et $\mathscr{A}$ l'aire d'un cercle de l'ensemble $\mathscr{E}$.
   On a $1\leqslant r\leqslant 2$ ainsi $\pi\leqslant \mathscr{A}\leqslant 4\pi$.
4. Le cercle de centre A de périmètre 6,283 2 a pour rayon $\dfrac{6,2832}{2\pi}=\dfrac{3,1416}{\pi}$.
   D'après la valeur approchée de π sur la calculatrice, on peut affirmer que $\pi<3,1416$.
   Ainsi le rayon $\dfrac{3,1416}{\pi}$ est supérieur à 1 et très voisin de 1, il est inférieur à 2.
   Le cercle appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.