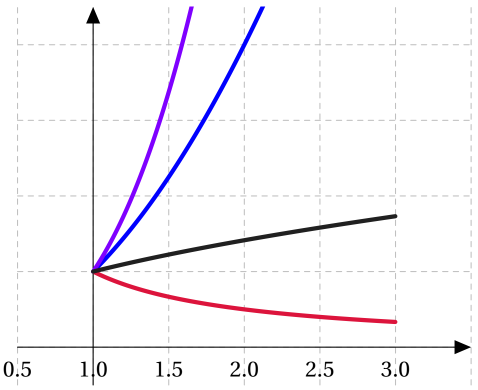
Parcours différenciés : Fonctions de référence

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégies d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

I. Exercices de base

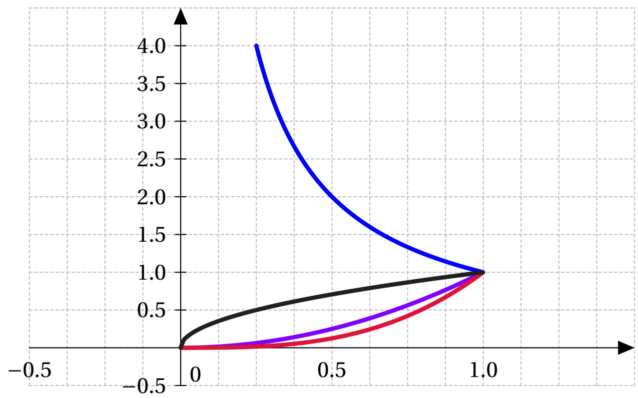
☞Exercice 1 ✧

Reconnaître les fonctions de référence associée au expression ($\sqrt{x}$; $\frac{1}{x}$; x^2 et x^3) en expliquant le démarche (il y a plusieurs démarches possibles) :



☞Exercice 2 ✧

Reconnaître les fonctions de référence associée au expression ($\sqrt{x}$; $\frac{1}{x}$; x^2 et x^3) en expliquant le démarche (il y a plusieurs démarches possibles) :



☞Exercice 3 ✧

Déterminer une fenêtre graphique de la calculatrice adaptée pour construire les courbes des fonctions de référence suivantes dans l'intervalle I ; donner sans justifier le tableau de variations de la fonction sur l'intervalle I :

1. $$f: \begin{array}{rcl} I=[2\,;\,100] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array}$$

2. $$f: \begin{array}{rcl} I=[-50\,;\,10] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array}$$

3. $$f: \begin{array}{rcl} I=[10\,;\,20] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}$$

4. $$f: \begin{array}{rcl} I=[-1\,;\,0[\cup]0\,;\,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}$$

5. $$f: \begin{array}{rcl} I=[-10\,;\,20] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^3 \end{array}$$

6. $$f: \begin{array}{rcl} I=[0\,;\,400] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

☞**Exercice 4** ✧

Sans justifier, à l'aide des représentations graphiques des fonctions de référence (à connaître par cœur), résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 = 256$
2. $x^2 = -10$
3. $x^2 - 5 = 0$
4. $\dfrac{1}{x} = -1$
5. $\dfrac{1}{x} = 4$
6. $x^3 = 125$
7. $x^3 = -1$
8. $\sqrt{x} = 6$
9. $\sqrt{x} = \sqrt{2}$

☞**Exercice 5** ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{4}{x} = x$
2. $\sqrt{4x} = x + 1$
3. $x^3 - 9x = 0$
4. $x^3 + 5x^2 = 0$

☞**Exercice 6** ✧

Sans justifier, à l'aide des représentations graphiques des fonctions de référence (à connaître par cœur), résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 < 121$
2. $x^2 - 3 > 0$
3. $\dfrac{1}{x} < -1$
4. $\dfrac{1}{x} < 5$
5. $x^3 > -64$
6. $\sqrt{x} < 81$

II. Prolongement des fonctions de référence

☞**Exercice 7** ✧✧

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (-5x+3)^2 + 6 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $(-5x+3)^2 = 0$.
2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,0,6]$:

   $a < b \leqslant 0,6$

   Comparer $-5a$ et $-5b$ et -3

   Comparer $-5a+3$ et $-5b+3$ et 0

   Comparer $(-5a+3)^2$ et $(-5b+3)^2$

   Comparer $(-5a+3)^2+6$ et $(-5b+3)^2+6$
3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $[0,6\,;\,+\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

☞**Exercice 8** ✧✧

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -(x+1)^2+4 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $(x+1)^2=0$.
2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,-1]$:

   $a<b\leqslant -1$

   Comparer $a+1$ et $b+1$ et 0

   Comparer $(a+1)^2$ et $(b+1)^2$

   Comparer $-(a+1)^2$ et $-(b+1)^2$

   Comparer $-(a+1)^2+4$ et $-(b+1)^2+4$
3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x)>0$.
   Après avoir factorisé $f(x)$, on pourra faire un tableau de signe de $f(x)$ puis conclure.

☞**Exercice 9** ✧✧

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[$ par

$$f: \begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2}{x-3}-5 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $x-3=0$.
2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,3[$:

   $a<b<3$

   Comparer $a-3$ et $b-3$ et 0

   Comparer $\dfrac{1}{a-3}$ et $\dfrac{1}{b-3}$

   Comparer $\dfrac{2}{a-3}$ et $\dfrac{2}{b-3}$

   Comparer $\dfrac{2}{a-3}-5$ et $\dfrac{2}{b-3}-5$
3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x)\leqslant 0$.
   Après avoir réduit au même dénominateur l'expression $f(x)$, on pourra faire un tableau de signe de $f(x)$ puis conclure.

III. Problèmes

☞**Exercice 10** ✧

Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère la parabole d'équation $y = x^2$, le point A d'abscisse a de la parabole, $a > 0$ et le point A' symétrique du point A par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.
Déterminer la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle $AA'O$ est 27 (unité d'aire).

☞**Exercice 11** ✧✧

Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, le point A d'abscisse a, $a > 0$ de la courbe et le point A' de coordonnées $(a\,;\,0)$.
On définit la fonction $\mathscr{A}$ qui à la variable a associe l'aire du triangle rectangle OAA' (en unité d'aire).

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la valeur a_0 pour laquelle $\mathscr{A}(a_0) = \dfrac{1}{2}$.

☞**Exercice 12** ✧✧✧

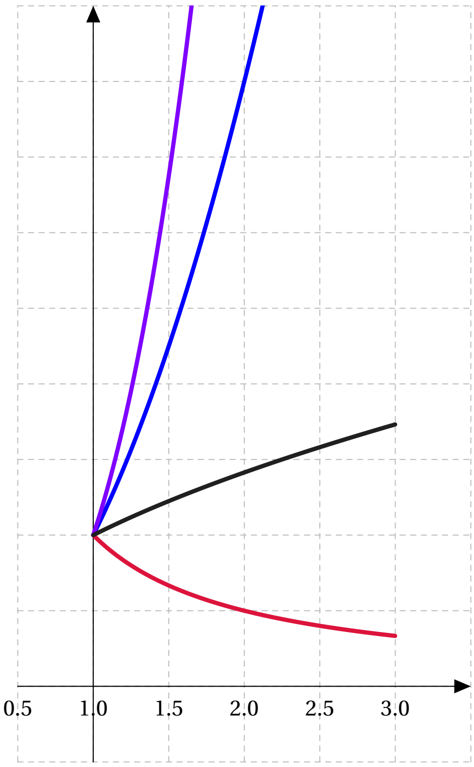
Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_1$ d'équation $y = \sqrt{x}$ et la courbe $\mathscr{C}_2$ d'équation $y = x^2$.
soit $a > 0$ et le point A de coordonnées $(a\,;\,\sqrt{a})$ et le point A' de coordonnées $(\sqrt{a}\,;\,a)$.
On définit la fonction $\mathscr{A}$ qui à la variable a associe l'aire du triangle OAA' (en unité d'aire).

1. Montrer que le point A' est un point de $\mathscr{C}_2$ et que le triangle OAA' est isocèle.
2. Montrer que $\mathscr{A}$ a pour expression $\dfrac{|a^2 - a|}{2}$.
   On pourra raisonner par disjonction de cas ($0 < a < 1$ et $1 < a$).
3. Montrer que $\mathscr{A}$ est une fonction croissante.
4. Pour quelle valeur de a ($a > 0$), l'aire est-elle nulle ?
5. Est-il vrai que si a est un entier naturel non nul alors $\mathscr{A}(a)$ est un entier naturel non nul ? Justifier.
   Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.

Correction

Exercice 1

Reconnaître les fonctions de référence en expliquant le démarche (il y a plusieurs démarches possibles) :



La démarche la plus rapide est de connaître l'inégalité pour $x \geqslant 1$: $\dfrac{1}{x} \leqslant \sqrt{x} \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

On peut aussi calculer l'image de $\dfrac{3}{2}$ pour chacune des fonctions de référence :

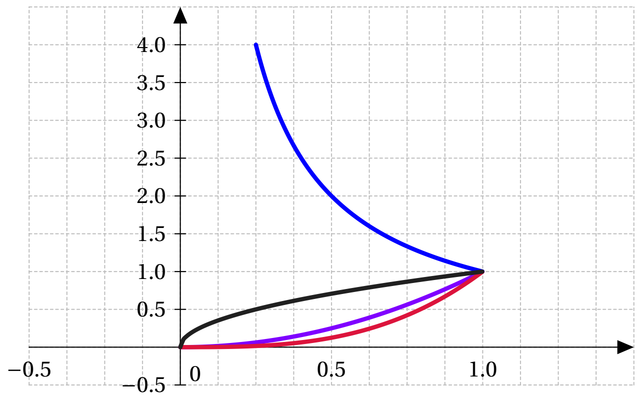
$$\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} < \sqrt{\frac{3}{2}} < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$$

On remarque que seule la fonction inverse est décroissante pour $x > 1$.

La courbe violette est celle associée à x^3, la courbe bleue est celle associée à x^2, la courbe grise est celle associée à $\sqrt{x}$ et la courbe rouge est celle associée à $\dfrac{1}{x}$.

Exercice 2

Reconnaître les fonctions de référence associée au expression ($\sqrt{x}$; $\dfrac{1}{x}$; x^2 et x^3) en expliquant le démarche (il y a plusieurs démarches possibles) :



La démarche la plus rapide est de connaître l'inégalité pour $0 \leqslant x \leqslant 1$: $\dfrac{1}{x} \geqslant \sqrt{x} \geqslant x^2 \geqslant x^3$.

On peut aussi calculer l'image de $\dfrac{1}{2}$ pour chacune des fonctions de référence :

$\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 > \sqrt{\dfrac{1}{2}} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

On remarque que seule la fonction inverse est décroissante pour $0 < x < 1$.

La courbe rouge est celle associée à x^3, la courbe violette est celle associée à x^2, la courbe grise est celle associée à $\sqrt{x}$ et la courbe blue est celle associée à $\dfrac{1}{x}$.

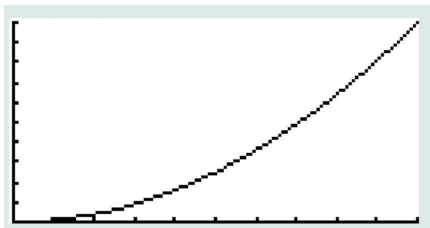
☞**Exercice 3** ✧

Déterminer une fenêtre graphique de la calculatrice adaptée pour construire les courbes des fonctions de référence suivantes dans l'intervalle I ; donner sans justifier le tableau de variations de la fonction sur l'intervalle I :

1. $\begin{array}{rrcl} f: & I = [2\,;\,100] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

x	2	10^2
f	4 ↗	10^4

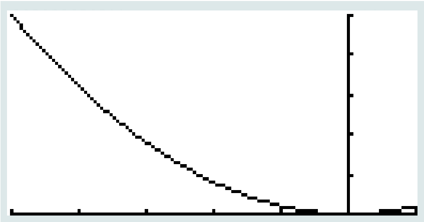
X_{min}	2 (ou 0)
X_{max}	100
échelle X	10
Y_{min}	4 (ou 0)
Y_{max}	10 000
échelle Y	1 000



2. $\begin{array}{rrcl} f: & I = [-50\,;\,10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

x	-50	0	10
f	$2\,500$ ↘	0 ↗	100

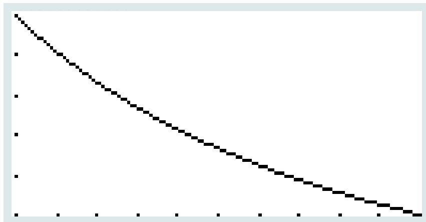
X_{min}	-50
X_{max}	10
échelle X	10
Y_{min}	0
Y_{max}	2 500
échelle Y	500



3. $$f : I = [10\,;\,20] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

x	10	20
f	$\frac{1}{10} = 0.1$ ↘	$\frac{1}{20} = 0.05$

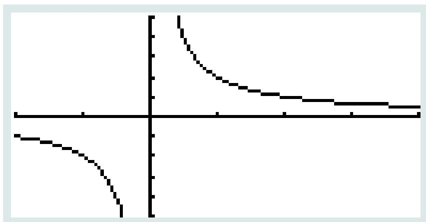
X_{min}	10
X_{max}	20
échelle X	1
Y_{min}	0,05
Y_{max}	0,1
échelle Y	0,01



4. $$f : I = [-1\,;\,0[\cup]0\,;\,2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

x	-1	0	2
f	-1 ↘	‖ ↘	$\frac{1}{2} = 0.5$

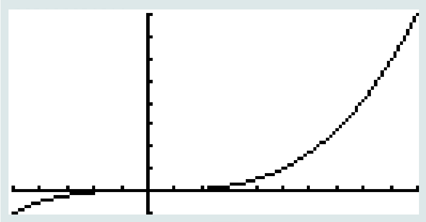
X_{min}	-1
X_{max}	2
échelle X	0,5
Y_{min}	-5
Y_{max}	5
échelle Y	1



5. $$f : I = [-10\,;\,20] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^3$$

x	-10	20
f	$-1\,000$ ↗	$8\,000$

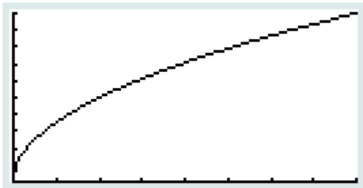
X_{min}	-10
X_{max}	20
échelle X	2
Y_{min}	$-1\,000$
Y_{max}	$8\,000$
échelle Y	$1\,000$



6. $f: \quad I = [0\,;\,400] \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

x	0	400
f	0 ↗	20

X_{min}	0
X_{max}	400
échelle X	50
Y_{min}	0
Y_{max}	20
échelle Y	2



☞**Exercice 4** ✧

Sans justifier, à l'aide des représentations graphiques des fonctions de référence (à connaître par cœur), résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 = 256$
   $x = -16$ ou $x = 16$
2. $x^2 = -10$
   Aucune solution
3. $x^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 5$
   $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$
4. $\dfrac{1}{x} = -1$
   $x = -1$
5. $\dfrac{1}{x} = 4$
   $x = \dfrac{1}{4}$
6. $x^3 = 125$
   $x = 5$
7. $x^3 = -1$
   $x = -1$
8. $\sqrt{x} = 6$
   $x = 36$
9. $\sqrt{x} = \sqrt{2}$
   $x = 2$.

☞**Exercice 5** ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{4}{x} = x \Longleftrightarrow 4 = x^2$ et $x \neq 0 \Longleftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$
   Les solutions sont $x = -2$ ou $x = 2$.
2. $\sqrt{4x} = x+1 \Longleftrightarrow 4x = (x+1)^2$ et $4x \geqslant 0 \Longleftrightarrow 4x = x^2+2x+1$ et $x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2-2x+1 = 0$ et $x \geqslant 0 \Longrightarrow (x-1)^2 = 0$ et $x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x = 1$
   $x = 1$ est solution de l'équation.
3. $x^3 - 9x = 0 \Longleftrightarrow x(x^2-9) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = 9 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$ ou $x = 3$.
   Les solutions de l'équation sont $x = -3$ ou $x = 0$ ou $x = 3$.
4. $x^3 + 5x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2(x+5) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 0$ ou $x+5 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = -5$
   Les solutions de l'équation sont $x = -5$ ou $x = 0$.

☞Exercice 6 ✧

Sans justifier, à l'aide des représentations graphiques des fonctions de référence (à connaître par cœur), résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 < 121$
   $x \in]-11\,;\,11[$
2. $x^2 - 3 > 0 \Longleftrightarrow x^2 > 3$
   $x \in]-\infty\,;\,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}\,;\,+\infty[$
3. $\dfrac{1}{x} < -1$
   $x \in]-\infty\,;\,-1[$
4. $\dfrac{1}{x} < 5$
   $]-\infty\,;\,0[\cup\left]\dfrac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$
5. $x^3 > -64$
   $x \in]4\,;\,+\infty[$
6. $\sqrt{x} < 81$
   $x \in [0\,;\,9[$.

☞Exercice 7 ✧✧

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (-5x+3)^2+6 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $(-5x+3)^2 = 0$.
   $(-5x+3)^2 = 0 \Longleftrightarrow -5x+3 = 0 \Longleftrightarrow -5x = -3 \Longleftrightarrow x = \dfrac{3}{5} = 0,6$.
   La solution de l'équation est $0,6$.

2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,0,6]$:

   $a < b \leqslant 0,6$

   $-5a > -5b \geqslant -3$ (on multiplie par -5)

   $-5a+3 > -5b+3 \geqslant 0$ (on ajoute 3)

   $(-5a+3)^2 > (-5b+3)^2 \geqslant 0$ (la fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$)

   $(-5a+3)^2+6 > (-5b+3)^2+6 \geqslant 6$ (on ajoute 6)

   $a < b \leqslant 0,6$ implique $f(a) > f(b) \geqslant 6$, l'ordre entre (a et b) et ($f(a)$ et $f(b)$) est opposé donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0,6[$.

3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $[0,6\,;\,+\infty[$.

   $0,6 \leqslant a < b$

   $-3 \geqslant -5a > -5b$ (on multiplie par -5)

   $0 \geqslant -5a+3 > -5b+3$ (on ajoute 3)

   $0 \leqslant (-5a+3)^2 < (-5b+3)^2$ (la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$)

   $0 \leqslant (-5a+3)^2+6 < (-5b+3)^2+6$ (on ajoute 6)

   $a < b \leqslant 0,6$ implique $f(a) > f(b) \geqslant 6$, l'ordre entre (a et b) et ($f(a)$ et $f(b)$) est le même donc la fonction f est croissante sur $[0,6\,;\,+\infty[$.

4. Donner le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		0.6		$+\infty$
f		$\searrow$	6	$\nearrow$	

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 6 atteint en $0,6$.

☞Exercice 8 ✧✧

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -(x+1)^2+4 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $(x+1)^2 = 0$.
   $(x+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x+1=0 \Longleftrightarrow x=-1$.

2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,-1]$:

   $a < b \leqslant -1$

   $a+1 < b+1 \leqslant 0$ (on ajoute 1)

   $(a+1)^2 > (b+1)^2 \geqslant 0$ (la fonction carré est décroissante sur $[-\infty\,;\,0]$)

   $-(a+1)^2 < -(b+1)^2 \leqslant 0$ (on multiplie par -1)

   $-(a+1)^2+4 < -(b+1)^2+4 \leqslant 4$ (on ajoute 4)

   L'ordre entre (a et b) et ($f(a)$ et $f(b)$) le même donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$.

3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$.

   $-1 \leqslant a < b$

   $0 \leqslant a+1 < b+1$ (on ajoute 1)

   $0 \leqslant (a+1)^2 < (b+1)^2$ (la fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$)

   $0 \geqslant -(a+1)^2 > -(b+1)^2$ (on multiplie par -1)

   $4 \geqslant -(a+1)^2+4 > -(b+1)^2+4$ (on ajoute 4)

   L'ordre entre (a et b) et ($f(a)$ et $f(b)$) est contraire donc la fonction f est décroissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

4. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$\nearrow$	4	$\searrow$

   Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 4 atteint en -1.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x) > 0$.
   Après avoir factorisé $f(x)$, on pourra faire un tableau de signe de $f(x)$ puis conclure.

   $-(x+1)^2+4 = 4-(x+1)^2 = (2-(x+1))(2+x+1) = (-x+1)(x+3)$

   $-x+1 > 0 \Longleftrightarrow x < 1$
   $-x+1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

   $x+3 > 0 \Longleftrightarrow x > -3$
   $x+3 = 0 \Longleftrightarrow x = -3$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$x \in]1\,;\,3[\Longleftrightarrow f(x) > 0$.

☞**Exercice 9** ✧✧

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[$ par

$$f:\quad \begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2}{x-3}-5 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $x-3=0$.
   La solution est 3.

2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,3[$:

   $a < b < 3$
   $a-3 < b-3 < 0$ (on ajoute 3)
   $0 > \dfrac{1}{a-3} > \dfrac{1}{b-3}$ (la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et les quotients sont négatifs)
   $0 > \dfrac{2}{a-3} > \dfrac{2}{b-3}$ (on multiplie par 2)
   $-5 > \dfrac{2}{a-3} - 5 > \dfrac{2}{b-3} - 5$ (on ajoute -5)
   L'ordre entre (a et b) et ($f(a)$ et $f(b)$) est contraire donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,3[$.

3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$.
   $3 < a < b$
   $0 < a-3 < b-3$ (on ajoute 3)
   $\dfrac{1}{a-3} > \dfrac{1}{b-3} > 0$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et les quotients sont positifs)
   $\dfrac{2}{a-3} > \dfrac{2}{b-3} > 0$ (on multiplie par 2)
   $\dfrac{2}{a-3} - 5 > \dfrac{2}{b-3} - 5 > -5$ (on ajoute -5)
   L'ordre entre (a et b) et ($f(a)$ et $f(b)$) est contraire donc la fonction f est décroissante sur $]3\,;\,+\infty[$.

4. Donner le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 0$.
   Après avoir réduit au même dénominateur l'expression $f(x)$, on pourra faire un tableau de signe de $f(x)$ puis conclure.
   $\dfrac{2}{x-3} - 5 = \dfrac{2}{x-3} - 5 \times \dfrac{x-3}{x-3} = \dfrac{2-5x+15}{x-3} = \dfrac{-5x+17}{x-3}$.

$-5x+17>0 \iff x<\dfrac{17}{5}=3,4$

$-5x+17=0 \iff x=\dfrac{17}{5}=3,4$

$x-3>0 \iff x>3$

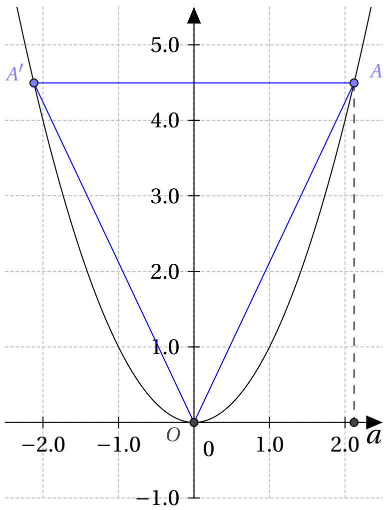
$x-3=0 \iff x=3$

x	$-\infty$		3		3.4		$+\infty$
$-5x+17$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$x\in]-\infty\,;\,-3[\cup[3,4\,;\,+\infty[\iff f(x)\leqslant 0.$

☞**Exercice 10** ✧

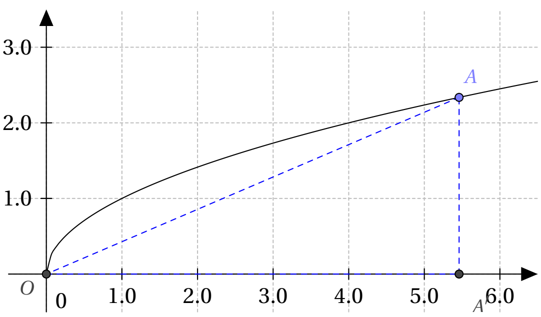
Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère la parabole d'équation $y=x^2$, le point A d'abscisse a, $a>0$ et le point A' symétrique du point A par rapport à l'axe $(O,\,\overrightarrow{i}\,)$.
Déterminer la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle $AA'O$ est 27 (unité d'aire).
Une figure sur GeoGebra permet de visualiser en place le problème :



L'aire $\mathscr{A}$ du triangle en fonction de a est : $\dfrac{a^2\times AA'}{2}=\dfrac{a^2\times 2a}{2}=a^3$.
$a^3=27$ a pour solution $a=3$.
La solution du problème est $a=3$.

☞**Exercice 11** ✧✧

Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$, le point A d'abscisse a, $a>0$ de la courbe et le point A' de coordonnées $(a\,;\,0)$.
On définit la fonction $\mathscr{A}$ qui à la variable a associe l'aire du triangle rectangle OAA' (en unité d'aire).



1. Montrer que $\mathscr{A}$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   $\mathscr{A}(a) = \dfrac{a \times \sqrt{a}}{2}$
   Soit $0 < a < b$,
   $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$ (la fonction racine carrée est croissante)
   $0 < a\sqrt{a} < a\sqrt{b}$ (on multiplie par a)
   et $a\sqrt{b} < b\sqrt{b}$ (on multiplie la première relation d'inéquations par $\sqrt{b}$).
   Ainsi $0 < a\sqrt{a} < a\sqrt{b} < b\sqrt{b}$ soit $0 < \dfrac{a\sqrt{a}}{2} < \dfrac{b\sqrt{b}}{2}$ soit $f(a) < f(b)$.
   L'ordre entre (a et b) et ($f(a)$ et $f(b)$) est conservé donc la fonction f est croissante.

2. Déterminer la valeur a_0 pour laquelle $\mathscr{A}(a_0) = \dfrac{1}{2}$.
   $a > 0$:
   $\dfrac{a\sqrt{a}}{2} = \dfrac{1}{2} \iff a\sqrt{a} = 1 \iff (a\sqrt{a})^2 = 1 \iff a^2 a = 1 \iff a^3 = 1 \iff a = 1.$
   La solution du problème est $a = 1$.