☙✾ Parcours différenciés : Courbe de fonctions, équations, inéquations ✾❧

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

I. Courbe d'une fonction

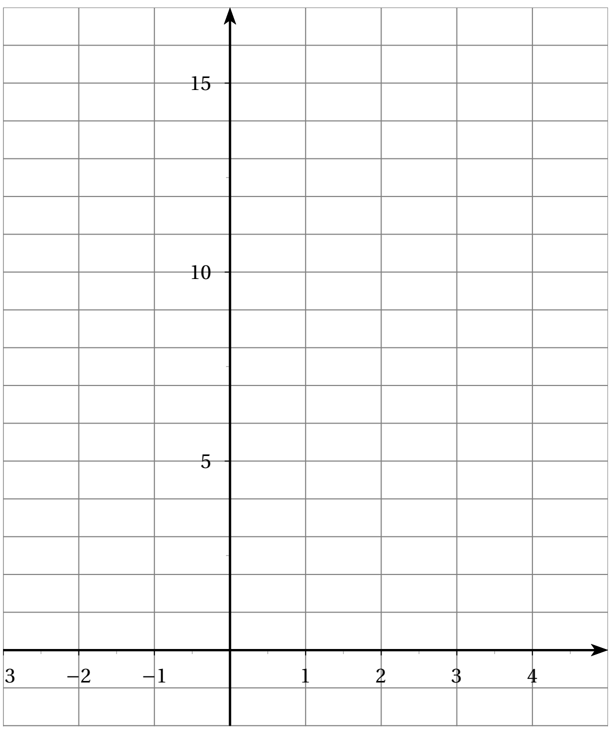
☞**Exercice 1** ✧

Sur le graphique suivant, construire la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

puis la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction affine g définie par :

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = -2x + 10 \end{array}$$



☞**Exercice 2** ✧

Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = f(x) = x^3 - 40x + 100 \end{array}$$

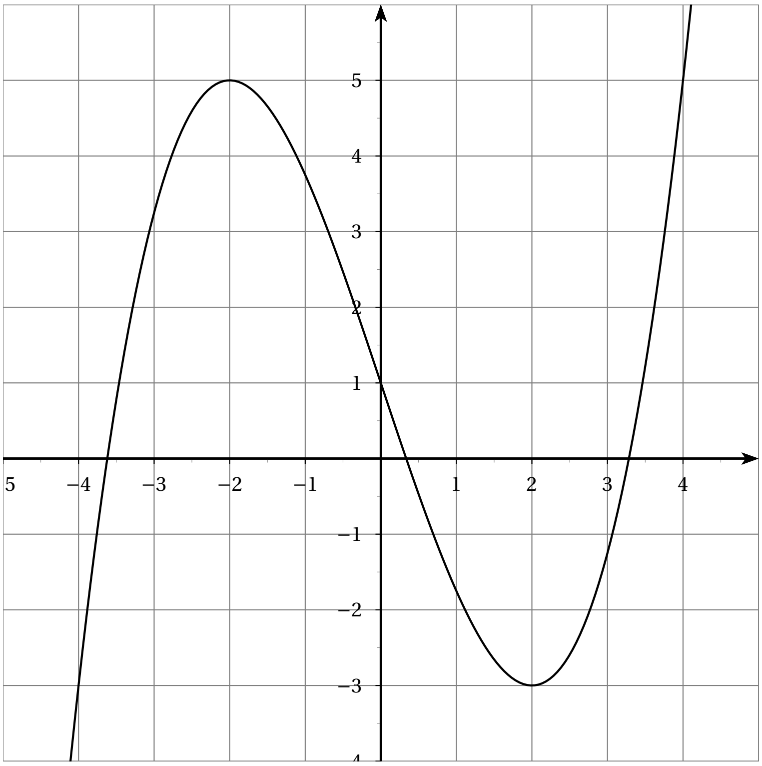
1. Sur votre calculatrice, construire une tableau de valeur pour x variant de -8 à 8 avec un pas de 1.

2. Construire la courbe de la fonction f sur votre calculatrice avec une fenêtre appropriée aux résultats de la question 1) pour $x \in [-8\,;\,5]$.

3. On souhaite faire un zoom autour du point d'abscisse 4 pour voir si la courbe coupe l'axe des abscisses autour de ce point.
   Proposer une fenêtre adaptée pour voir la courbe de la fonction f autour du point d'abscisse 4.

☞**Exercice 3** ✧

Le graphique suivant illustre la courbe d'une fonction f.



1. Sur la courbe, placer le point A d'abscisse 3. Lire son ordonnée. Cela revient à lire graphiquement $f(3)$.

2. Sur la courbe, placer les points B, C et D d'ordonnées 3. Lire leur abscisse. Cela revient à résoudre graphiquement $f(x) = 3$.

3. Placer les points de la courbe dont l'ordonnée est -3. Lire leur abscisse. Cela revient à résoudre graphiquement $f(x) = -3$.

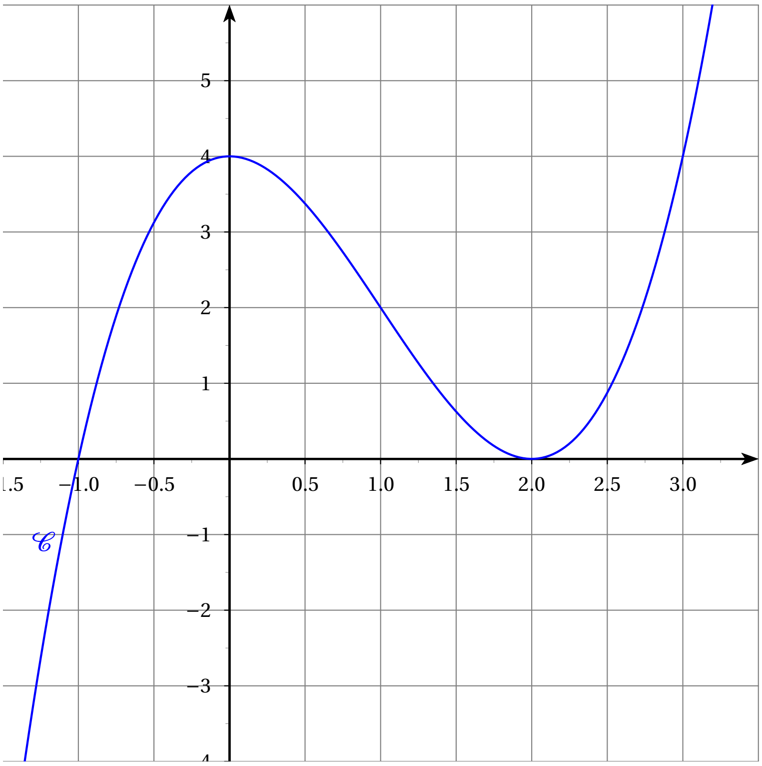
4. Placer le point G de la courbe d'abscisse 0. Lire son ordonnée. Cela revient à lire graphiquement $f(0)$.

5. Placer les points de la courbe dont l'ordonnée est 0. Lire leur abscisse. Cela revient à résoudre graphiquement $f(x) = 0$.

II. Lecture graphique, équations et inéquations

☞**Exercice 4** ✧

On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f :

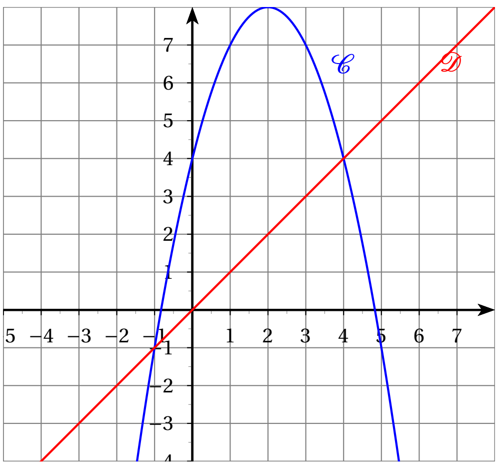


Résoudre graphiquement :

1. $f(x) = 4$
2. $f(x) = 0$
3. $f(x) = 2$
4. $f(x) > 4$
5. $f(x) \leqslant 0$.
6. $f(x) \geqslant 2$

☞**Exercice 5** ✧

Le graphique suivant illustre la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f et la droite $\mathscr{D}$ d'une fonction affine.



1. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$
2. Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$.

III. Inéquations algébriques

Correction

Exercice 1

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \end{array}$$

Pour la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f, on construit un tableau de valeurs en respectant le fenêtre graphique, ici, x varie entre -3 et 5.
Ce tableau peut être obtenu à l'aide des tables de la calculatrice (ou par le calcul mental), on peut choisir un pas de 1 pour les valeurs de x, nous aurons ainsi 7 points pour construire la courbe (c'est suffisant dans notre exemple).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

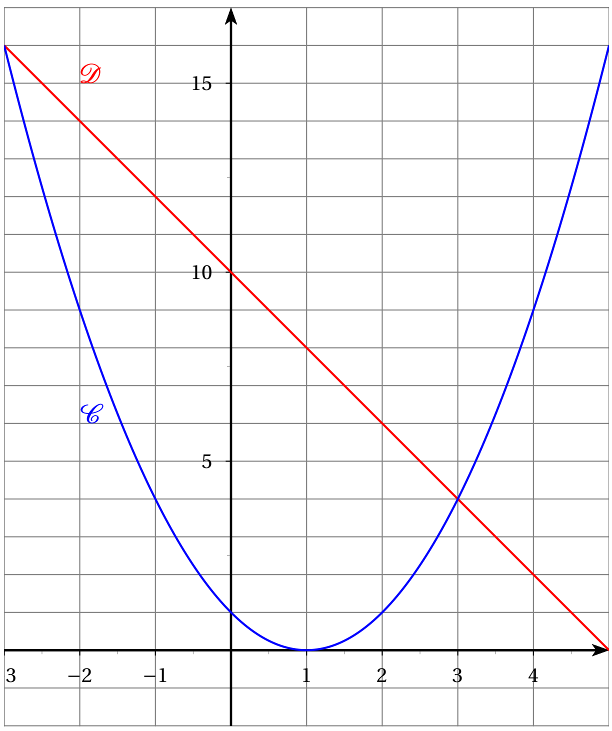
Lecture : pour le choix de $x = -3$ *on calcule* $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) + 1 = 16$.
On place les points de coordonnées $(-3\,;\, f(-3))$, $(-2\,;\, f(-2))$, ..., $(5\,;\, f(5))$ puis on relie ces points à la main levée et de manière régulière (d'autres points peuvent convenir).

$$fg: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = -2x + 10 \end{array}$$

Pour la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction g, on construit deux points très éloignés et/ou trois points pour une meilleure précision du tracé. On choisit des valeurs de x pour construire la tables de valeurs :

x	-3	0	5
$g(x)$	16	10	0

Lecture : pour le choix de $x = -3$ *on calcule* $g(-3) = -2 \times (-3) + 10 = 16$
On place les points de coordonnées $(-3\,;\, g(-3))$, $(0\,;\, g(0))$ et $(5\,;\, g(5))$ (d'autres points peuvent convenir).



☞Exercice 2 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = f(x) = x^3 - 40x + 100 \end{array}$$

1. Après avoir saisi l'expression de la fonction f dans le menu adapté, on règle la table :

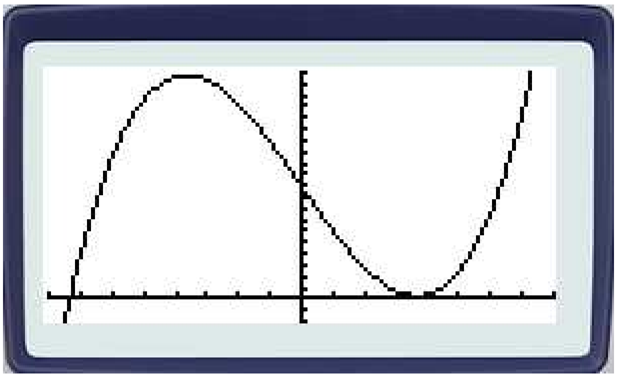
   début : −8 fin : 8 pas : 1

   Le début de la table :

X	Y1
-8	-92
-7	37
-6	124
-5	175

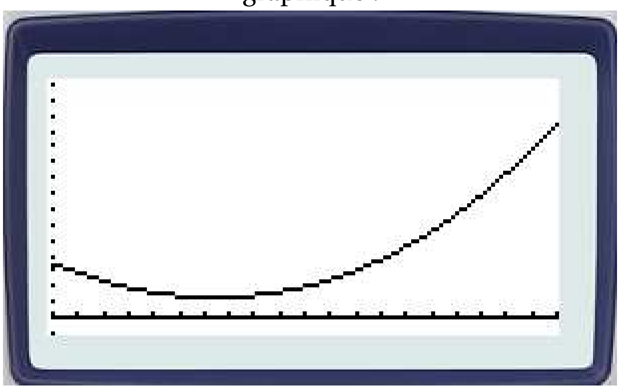
2. On lit le minimum et le maximum de Y qui donnera une fenêtre graphique (on adapte la fenêtre pour voir le minimum et le maximum) :

   $X_{min}: -8$ $X_{max}: 8$ $echelleX: 1$
   $Y_{min}: -20$ $Y_{max}: 200$ $echelleY: 10$
   graphique :



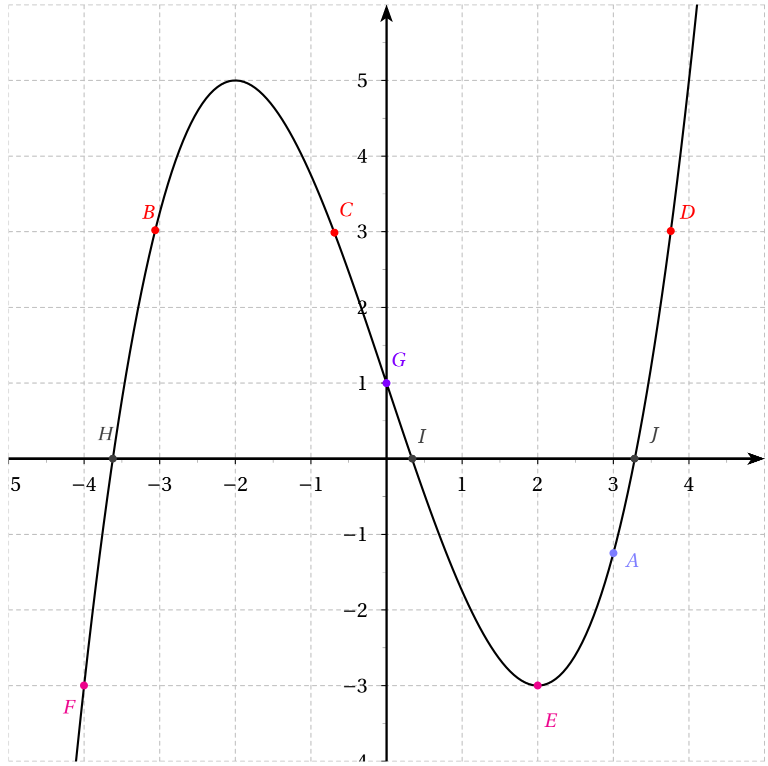
3. On peut utiliser la fonction zoom de la calculatrice, mais pour une meilleure maîtrise de la fenêtre proposer de changer les valeurs :

   $X_{min}: 3$ $X_{max}: 5$ $echelleX: 0.1$
   $Y_{min}: -2$ $Y_{max}: 30$ $echelleY: 2$
   graphique :



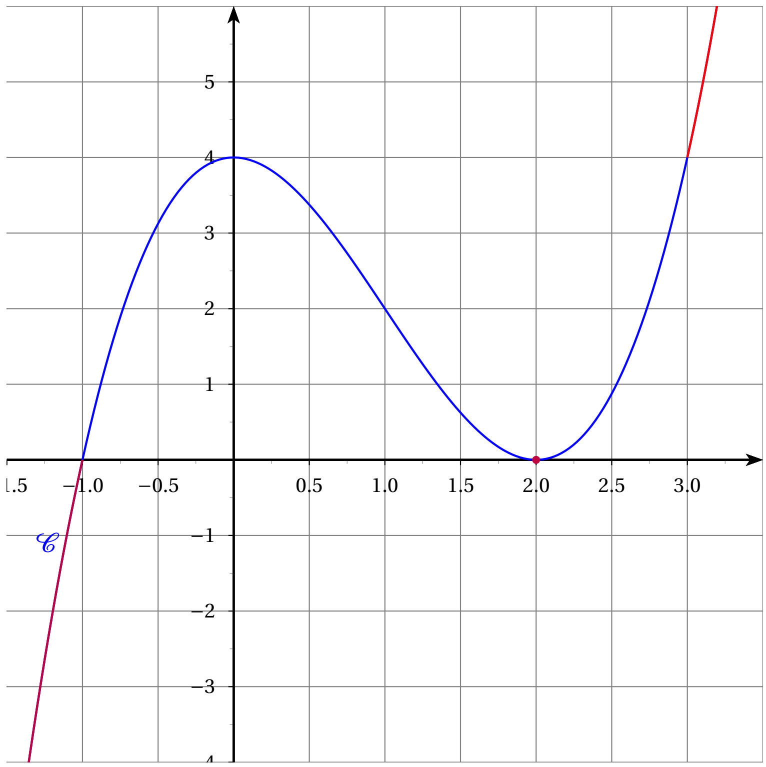
   Il semble que la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses autour du point d'abscisse 4.

☞**Exercice 3** ✧



1. l'ordonnée du point A est $f(3) = -1,25$ (toutes valeurs autour de $-1,25$ sont admises).
2. On lit -3, $-0,7$ et $3,8$. L'équation $f(x) = 3$ admet 3 solutions $\{-3\ ;\ -0,7\ ;\ 3,8\}$.
3. L'équation $f(x) = -3$ admet deux solutions $\{-4\ ;\ 2\}$, l'abscisse des points E et F.
4. $f(0) = 1$, il s'agit de l'ordonnée du point G.
5. L'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions $\{-3,6\ ;\ 0,3\ ;\ 3,3\}$, l'abscisse des points H, I et J.

☞**Exercice 4** ✧



Résoudre graphiquement :

1. $f(x) = 4$
   On lit l'abscisse des points de la courbe d'ordonnée 4, il y a deux points, leur abscisse est 0 et 3.
   L'ensemble des solutions est $\{0\ ;\ 3\}$.

2. $f(x) = 0$
   On lit l'abscisse des points de la courbe d'ordonnée 4, il y a deux points, leur abscisse est -1 et 2.
   L'ensemble des solutions est $\{-1\ ;\ 2\}$.

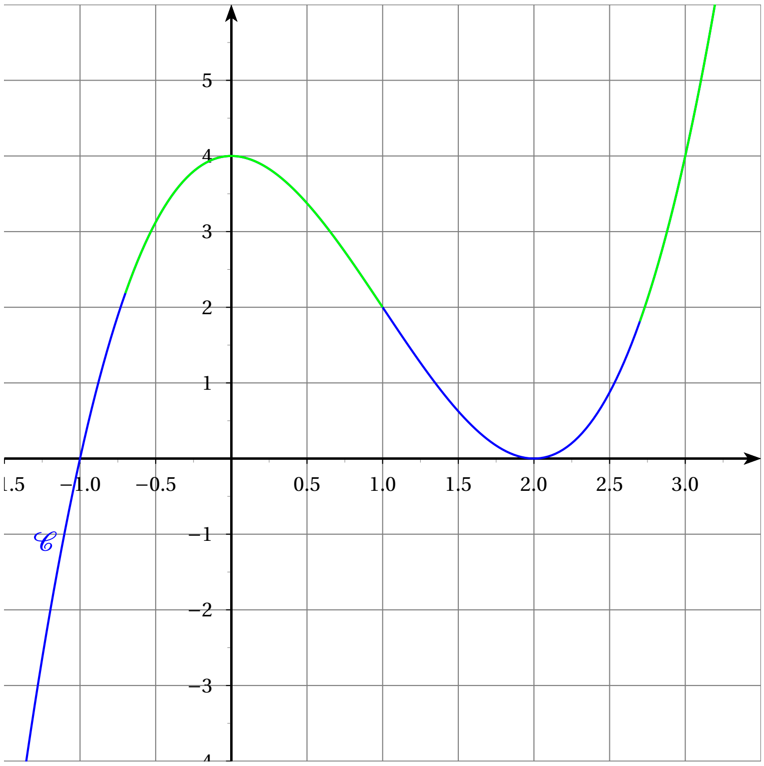
3. $f(x) = 2$
   On lit l'abscisse des points de la courbe d'ordonnée 2, il y a trois points, leur abscisse est $-0,7$, 1 et $2,7$.
   L'ensemble des solutions est $\{-0,7\ ;\ 1\ ;\ 2,7\}$.

4. $f(x) > 4$
   On lit l'abscisse des points de la courbe d'ordonnée strictement supérieure à 4 (partie rouge sur le graphique), il y a une infinité, ces points ont une abscisse dans l'intervalle $]3\ ;\ 3,5]$ qui semble prolongeable à l'intervalle $]3\ ;\ +\infty[$ si la tendance de la courbe reste la même.
   L'ensemble des solutions est $]3\ ;\ 3,5]$ ou $]3\ ;\ +\infty[$.
   Comme $f(3) = 4$ $x = 3$ n'est pas atteint, l'intervalle est ouvert en 3.

5. $f(x) \leqslant 0$.
   On lit l'abscisse des points de la courbe d'ordonnée inférieure ou égale à 0 (partie violette sur le graphique), il y a une infinité, ces points ont une abscisse dans l'intervalle $[-1,5\ ;\ -1]$ qui semble prolongeable à l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$ si la tendance de la courbe reste la même ; et le point d'abscisse 2 convient.
   L'ensemble des solutions est $[-1,5\ ;\ -1] \cup \{2\}$ ou $]-\infty\ ;\ -1] \cup \{2\}$.
   Comme $f(-1) = f(2) = 0$ $x = -1$ et $x = 2$ sont atteints.

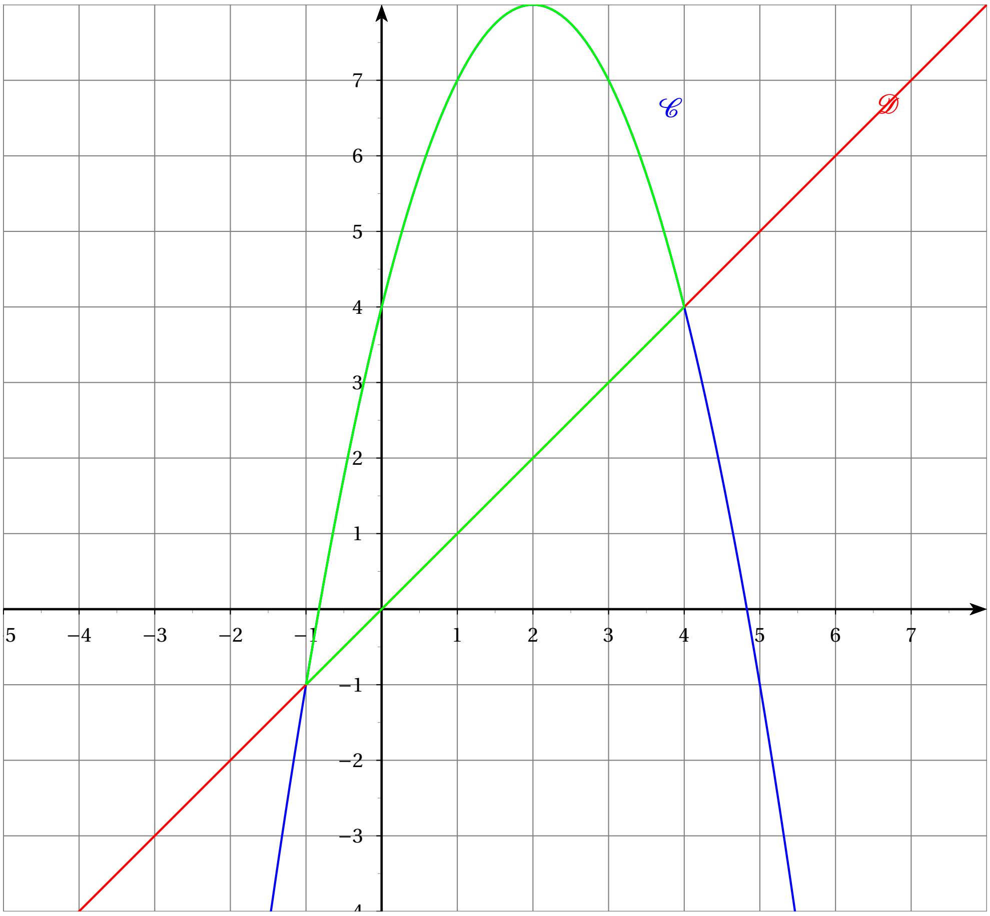
6. $f(x) \geqslant 2$
   On lit l'abscisse des points de la courbe d'ordonnée supérieure ou égale à 2 (partie verte sur le graphique ci-dessous), il y a une infinité, ces points ont une abscisse dans l'intervalle $[-0,7\ ;\ 1]$ ou l'intervalle $[2,7\ ;\ 3,5]$ qui semble prolongeable à l'intervalle $[2,7\ ;\ +\infty[$ si la tendance de la courbe reste la même.

L'ensemble des solutions est $[-0,7\,;\,1] \cup [2,7\,;\,3,5]$ ou $[-0,7\,;\,1] \cup [2,7\,;\,+\infty[$.
Comme $f(-0,7) = f(1) = f(2,7) = 2$, $x = -0,7$, $x = 1$ et $x = 2,7$ sont atteints.



☞**Exercice 5** ✧

Le graphique suivant illustre la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f et la droite $\mathscr{D}$ d'une fonction affine.



1. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$
   On lit l'abscisse des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. Il y a deux point d'intersection, les abscisses solutions sont -1 et 4.
   L'ensemble de solution est $\{-1\ ;\ 4\}$.

2. Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$.
   On lit l'abscisse des points de la courbe $\mathscr{C}$ situés au dessus des points de la courbe $\mathscr{D}$ (pour une même abscisse, voir les parties vertes de chacune des courbes).une infinité de ces points, les abscisses solutions dans l'intervalle $]-1\ ;\ 4[$.
   L'ensemble de solution est $]-1\ ;\ 4[$.
   $f(-1) = g(-1)$ et $f(4) = g(4)$ donc -1 et 4 ne sont pas solution, l'inégalité est stricte.