# ❧ Parcours différenciés : Arithmétique ❧

**Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.**
**Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.**
**Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.**
**savoir faire :** travail autonome avec des stratégies d'auto-correction.
**tenter :** travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
**prendre des initiatives :** étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

**☞Exercice 1 ✧**

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

1. 72
2. 136
3. 275
4. 450
5. 2 016
6. 25 600
7. 121 000
8. 1 513 512
9. 24 092 640

**☞Exercice 2 ✧**

Déterminer tous les diviseurs des nombres suivants :

1. 84
2. 102
3. 285
4. 256

**☞Exercice 3 ✧✧**

1. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres $a = 12600$ et $b = 3234000$.
2. Déterminer le plus petit multiple commun de ces deux nombres $a$ et $b$.
3. Déterminer le plus grand diviseur commun de ces deux nombres $a$ et $b$.

**☞Exercice 4 ✧**

On dispose de carreaux de côté 72 cm et 48 cm. Quel est le plus petit carré qu'on puisse former avec un nombre entier de ces carreaux.

**☞Exercice 5 ✧**

On veut carreler une pièce rectangulaire de côté 4,68 m et 3,42 m. Quelles tailles de côté de carreaux carrés de mesure entière en centimètre peut-on choisir ?

**☞Exercice 6 ✧**

Soient $a$ et $b$ deux entiers pairs avec $a < b$.
Démontrer que leur différence $b - a$ est paire.

**☞Exercice 7** ✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers pairs avec $a < b$.
Démontrer que leur somme $a + b$ est paire.

**☞Exercice 8** ✧✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers pairs avec $a < b$.
Démontrer que leur produit $ab$ est pair.

**☞Exercice 9** ✧

$a$ et $b$ sont deux entiers naturels pairs avec $a < b$ et $a$ divise $b$.
Est-ce que le quotient $\dfrac{a}{b}$ est pair ?

**☞Exercice 10** ✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers impairs avec $a < b$.
Démontrer que leur différence $b - a$ est paire.

**☞Exercice 11** ✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers impairs avec $a < b$.
Démontrer que leur somme $a + b$ est paire.

**☞Exercice 12** ✧✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers impairs avec $a < b$.
Démontrer que leur produit $ab$ est impair.

## Correction

### Exercice 1 ✧

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

1. $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$
2. $136 = 8 \times 17 = 2^3 \times 17$
3. $275 = 25 \times 11 = 5^2 \times 11$
4. $450 = 45 \times 10 = 5 \times 9 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$
5. $2\,016 = 32 \times 9 \times 7 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
   Les divisions successives de 2 016 par 2 (5 fois), puis 63 par 3 (deux fois) permettent de trouver la décomposition :
   $\dfrac{2\,016}{2} = 1\,008$ ; $\dfrac{1\,008}{2} = 504$ ; $\dfrac{504}{2} = 252$ ; $\dfrac{252}{2} = 126$ ; $\dfrac{126}{2} = 63$ ; $\dfrac{63}{3} = 21$ ; $\dfrac{21}{3} = 7$.
6. $25\,600 = 16^2 \times 10^2 = (2^4)^2 \times (2 \times 5)^2 = 2^8 \times 2^2 \times 5^2 = 2^{10} \times 5^2$.
7. $121\,000 = 11^2 \times 10^3 = 11^2 \times (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 \times 11^2$
8. $1\,513\,512 = 2^3 \times 3^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$
   Les divisions successives de 1 513 512 par 2 (3 fois), puis 189 189 par 3 (3 fois) puis 7 007 par 7 (2 fois), puis 143 par 11, permettent de trouver la décomposition.
9. $24\,092\,640 = 2^5 \times 3^4 \times 5 \times 11 \times 13^2$

### Exercice 2 ✧

Déterminer tous les diviseurs des nombres suivants :

1. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.
   Les diviseurs de 84 sont :
   $2^0 \times 3^0 \times 7^0 = 1$
   $2^0 \times 3^0 \times 7^1 = 7$
   $2^0 \times 3^1 \times 7^0 = 3$
   $2^0 \times 3^1 \times 7^1 = 21$
   $2^1 \times 3^0 \times 7^0 = 2$
   $2^1 \times 3^0 \times 7^1 = 14$
   $2^1 \times 3^1 \times 7^0 = 6$
   $2^1 \times 3^1 \times 7^1 = 42$
   $2^2 \times 3^0 \times 7^0 = 4$
   $2^2 \times 3^0 \times 7^1 = 28$
   $2^2 \times 3^1 \times 7^0 = 12$
   $2^2 \times 3^1 \times 7^1 = 84$
2. $102 = 2 \times 3 \times 17$.
   Les diviseurs de 102 sont :
   $2^0 \times 3^0 \times 17^0 = 1$
   $2^0 \times 3^0 \times 17^1 = 17$
   $2^0 \times 3^1 \times 17^0 = 3$
   $2^0 \times 3^1 \times 17^1 = 51$
   $2^1 \times 3^0 \times 17^0 = 2$
   $2^1 \times 3^0 \times 17^1 = 34$
   $2^1 \times 3^1 \times 17^0 = 6$
   $2^1 \times 3^1 \times 17^1 = 102$
3. $285 = 3 \times 5 \times 19$.
   Les diviseurs de 285 sont :
   $3^0 \times 5^0 \times 19^0 = 1$
   $3^0 \times 5^0 \times 19^1 = 19$
   $3^0 \times 5^1 \times 19^0 = 5$
   $3^0 \times 5^1 \times 19^1 = 95$
   $3^1 \times 5^0 \times 19^0 = 3$
   $3^1 \times 5^0 \times 19^1 = 57$
   $3^1 \times 5^1 \times 19^0 = 15$
   $3^1 \times 5^1 \times 19^1 = 285$
4. $256 = 2^8$
   Les diviseurs de 516 sont :
   $2^0 = 1$
   $2^1 = 2$
   $2^2 = 4$
   $2^3 = 8$
   $2^4 = 16$
   $2^5 = 32$
   $2^6 = 64$
   $2^7 = 128$
   $2^8 = 256$

### Exercice 3 ✧✧

1. $a = 12\,600 = 126 \times 10^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ et $b = 3\,234\,000 = 3\,234 \times 10^3 = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$.

2. Le plus petit multiple commun de ces deux nombres $a$ et $b$ est $2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 = 9\,702\,000$.

3. Le plus grand diviseur commun de ces deux nombres $a$ et $b$ est $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 4\,200$.

☞**Exercice 4** ✧

1. Décomposer $a = 12\,600$ et $b = 3\,234\,000$ en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer le plus petit multiple commun de ces deux nombres $a$ et $b$.
3. Déterminer le plus grand diviseur commun de ces deux nombres $a$ et $b$.

☞**Exercice 5** ✧

On dispose de carreaux de côté 72 cm et 48 cm. Quel est le plus petit carré qu'on puisse former avec un nombre entier de ces carreaux.
$72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ et $48 = 16 \times 3 = 2^4 \times 3$.

Le plus petit multiple commun de 72 et 48 est $2^4 \times 3^2 = 144$.
Le plus petit carré qu'on puisse formé est de côté $144 cm$, il y aura 3 rangées de côté 48 cm et 2 rangées de côté 72 cm.

☞**Exercice 6** ✧

On veut carreler une pièce rectangulaire de côté 4,68 m et 3,42 m. Quelles tailles de côté de carreaux carrés de mesure entière en centimètre peut-on choisir ?
$468 = 2^2 \times 3^2 \times 13$ et $342 = 2 \times 3^2 \times 19$.
Le plus grand diviseur communs de ces deux nombres est $2 \times 3^2 = 18$ et tous les diviseurs de 18 divisent les deux nombres.

On peut donc choisir des carreaux de côté 18 cm, 9 cm et 6 cm, 3 cm, 2 cm et 1 cm.

☞**Exercice 7** ✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers pairs avec $a < b$.
Démontrer que leur différence $b - a$ est paire.
$a$ est pair : il existe $a'$ entier tel que $a = 2a'$,

$b$ est pair : il existe $b'$ entier tel que $b = 2b'$,
$b - a = 2b' - 2a' = 2(b' - a')$.
Il existe donc un entier $b' - a' = n$ tel que $b - a = 2n$, ainsi $b - a$ est pair.

☞**Exercice 8** ✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers pairs avec $a < b$.
Démontrer que leur somme $a + b$ est paire.
$a$ est pair : il existe $a'$ entier tel que $a = 2a'$,

$b$ est pair : il existe $b'$ entier tel que $b = 2b'$,
$a + b = 2a' + 2b' = 2(a' + b')$.
Il existe donc un entier $a' + b' = n$ tel que $a + b = 2n$, ainsi $a + b$ est pair.

☞**Exercice 9** ✧✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers pairs avec $a < b$.
Démontrer que leur produit $ab$ est pair.
$a$ est pair : il existe $a'$ entier tel que $a = 2a'$,

$b$ est pair : il existe $b'$ entier tel que $b = 2b'$,
$ab = 2a' \times 2b' = 2(2a'b')$.
Il existe donc un entier $2a'b' = n$ tel que $ab = 2n$, ainsi $ab$ est pair.

### ☞Exercice 10 ✧

$a$ et $b$ sont deux entiers naturels pairs avec $a < b$ et $a$ divise $b$.
Est-ce que le quotient $\dfrac{a}{b}$ est pair ?
contre-exemple : 4 et 36 sont pairs, 4 divise 36 et leur quotient, 9 est impair.
Le quotient peut-être pair (exemple $a = 4$ et $b = 48$) ou impair.

### ☞Exercice 11 ✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers impairs avec $a < b$.
Démontrer que leur différence $b - a$ est paire.
$a$ est impair : il existe $a'$ entier tel que $a = 2a' + 1$,

$b$ est impair : il existe $b'$ entier tel que $b = 2b' + 1$,
$b - a = 2b' + 1 - (2a' + 1) = 2b' - 2a' = 2(b' - a')$.
Il existe donc un entier $b' - a' = n$ tel que $b - a = 2n$, ainsi $b - a$ est pair.

### ☞Exercice 12 ✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers impairs avec $a < b$.
Démontrer que leur somme $a + b$ est paire.
$a$ est pair : il existe $a'$ entier tel que $a = 2a' + 1$,

$b$ est pair : il existe $b'$ entier tel que $b = 2b' + 1$,
$a + b = 2a' + 1 + 2b' + 1 = 2a' + 2b' + 2 = 2(a' + b' + 1)$.
Il existe donc un entier $a' + b' + 1 = n$ tel que $a + b = 2n$, ainsi $a + b$ est pair.

### ☞Exercice 13 ✧✧

Soient $a$ et $b$ deux entiers impairs avec $a < b$.
Démontrer que leur produit $ab$ est impair.
$a$ est impair : il existe $a'$ entier tel que $a = 2a' + 1$,

$b$ est impair : il existe $b'$ entier tel que $b = 2b' + 1$,
$ab = (2a' + 1) \times (2b' + 1) = 4a'b' + 2a' + 2b' + 1 = 2(2a'b' + a' + b') + 1$.
Il existe donc un entier $2a'b' + a' + b' = n$ tel que $ab = 2n + 1$, ainsi $ab$ est impair.