# ☙✿ Parcours différenciés : Opérations de bases sur des expressions ✿❧

**Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.**
**Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.**
**Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.**
**savoir faire :** travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
**tenter :** travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
**prendre des initiatives :** étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

*Tous les exercices peuvent se faire sans calculatrice, entraînez vous à calculer sans calculatrice.*

## I. Calcul sur des expressions

**☞Exercice 1 ✧**

Réduire au même dénominateur les expressions suivantes :

1. $\dfrac{2}{x}+1$
2. $\dfrac{x}{x+1}+x$
3. $x+2-\dfrac{x+1}{x+2}$
4. $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$
5. $2x+1-\dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x}$

**☞Exercice 2 ✧✧**

Réduire au même dénominateur les expressions suivantes :

1. $\dfrac{5x-2}{x(x+1)}-\dfrac{2x-1}{x(x+2)}$
2. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{2}{x}$

**☞Exercice 3 ✧**

Développer les expressions suivantes :

1. $(5x)^2(1-4x)^2$
2. $(1-3x^2)(1+3x^2)$
3. $(a-b)(a+b)^2$
4. $\left(\dfrac{2}{x}\right)^2(x^2+x)$

**☞Exercice 4 ✧**

Développer les expressions suivantes :

1. $(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x})$
2. $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2$

## II. Montrer des identités

**☞Exercice 5 ✧**

Démontrer que pour tout nombre réel $x$ :

$$x^2(x^3-x)^2=x^4(x-1)^2(x+1)^2$$

☞**Exercice 6** ✧

Démontrer que pour tout nombre réel $x$ non nul :

$$1-\frac{9}{x^2}=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

☞**Exercice 7** ✧✧

Démontrer que pour tout nombre réel $x$ strictement positif :

$$\frac{\frac{x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{x^2}=\frac{-x}{2x^2\sqrt{x}}$$

## III. Résoudre des équations

☞**Exercice 8** ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\frac{2}{3}\times\frac{x}{2}=3\times\frac{4}{9}$
2. $\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}$
3. $\frac{x-1}{x}-\frac{1}{2}=0$
4. $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=1$

☞**Exercice 9** ✧✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^3-x=0$
2. $\frac{x}{4}=\frac{1}{x}$
3. $\frac{x}{x+1}=\frac{x}{x+2}$
4. $\frac{x+\frac{1}{2}}{3}=\frac{2}{5}$

## Correction

☞**Exercice 1** ✧

Réduire au même dénominateur les expressions suivantes :

1. $\dfrac{2}{x}+1=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{x}=\dfrac{2+x}{x}$
2. $\dfrac{x}{x+1}+x=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x(x+1)}{x+1}=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$
3. $x+2-\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{(x+2)^2-(x+1)}{x+2}=\dfrac{x^2+4x+4-x-1}{x+2}=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$
4. $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n}{(n+1)n}-\dfrac{n+1}{n(n+1)}=\dfrac{n-n-1}{n(n+1)}=\dfrac{-1}{n(n+1)}$
5. $2x+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+x-1}{x}$
6. $\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{x^2\times 2x}{(x-1)2x}-\dfrac{(x+1)(x-1)}{2x(x-1)}=\dfrac{2x^3-(x^2-1)}{2x(x-1)}=\dfrac{2x^3-x^2+1}{2x(x-1)}$

☞**Exercice 2** ✧✧

Réduire au même dénominateur les expressions suivantes :

1. $\dfrac{5x-2}{x(x+1)}-\dfrac{2x-1}{x(x+2)}=\dfrac{(5x-2)(x+2)}{x(x+1)(x+2)}-\dfrac{(2x-1)(x+1)}{x(x+2)(x+1)}=\dfrac{5x^2+6x-4-(2x^2+x-1)}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{3x^2+5x-3}{x(x+1)(x+2)}$
2. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{2}{x}=\left(\dfrac{x}{x}-\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{x^2-2x+1+2x}{x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

☞**Exercice 3** ✧

Développer les expressions suivantes :

1. $(5x)^2(1-4x)^2=25x^2(1-8x+16x^2)=\dfrac{100}{4}x^2\left(1-8x+16x^2\right)=x^2(25-200x+400x^2)=400x^4-200x^3+25x^2$
2. $(1-3x^2)(1+3x^2)=1-9x^4$
3. $(a-b)(a+b)^2=(a-b)(a+b)(a+b)=(a^2-b^2)(a+b)=a^3+ba^2-ab^2-b^3$
4. $\left(\dfrac{2}{x}\right)^2(x^2+x)=\dfrac{4}{x^2}(x^2+x)=\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{4x}{x^2}=4+\dfrac{4}{x}$

☞**Exercice 4** ✧

Développer les expressions suivantes :

1. $(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x})=x\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{x}+x+\sqrt{x}=x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}$
2. $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2=\sqrt{x}(1-2\sqrt{x}+x)=\sqrt{x}-2x+x\sqrt{x}$

### ☞Exercice 5 ✧

Démontrer que pour tout nombre réel $x$ :

$$x^2(x^3-x)^2 = x^4(x-1)^2(x+1)^2$$

On factorise le membre de gauche :
$x^2(x^3-x)^2 = x^2(x(x^2-1))^2 = x^2 \times x^2 \times (x^2-1)^2 = x^4((x-1)(x+1))^2 = x^4(x-1)^2(x+1)^2$.
On peut aussi développer chacun des deux membres et montrer qu'ils sont égaux, mais le travail est long et fastidieux, vous risquez aussi de faire des erreurs, il faut privilégier des calculs courts.

### ☞Exercice 6 ✧

Démontrer que pour tout nombre réel $x$ non nul :

$$1-\frac{9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

On réduit au même dénominateur le membre de gauche :
$1-\dfrac{9}{x^2} = \dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{9}{x^2} = \dfrac{x^2-9}{x^2} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$.
(autre méthode) On peut aussi développer le membre de droite :
$\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2} = \dfrac{x^2-9}{x^2} = \dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{9}{x^2} = 1-\dfrac{9}{x^2}$.

### ☞Exercice 7 ✧✧

Démontrer que pour tout nombre réel $x$ strictement positif :

$$\frac{\frac{x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{x^2} = \frac{-x}{2x^2\sqrt{x}}$$

On réduite au même dénominateur le numérateur du membre de gauche :
$\dfrac{\frac{x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{\frac{x}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x^2} = \dfrac{\frac{-x}{2\sqrt{x}}}{x^2} = \dfrac{-x}{2\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-x}{2x^2\sqrt{x}}$

### ☞Exercice 8 ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{x}{2} = 3\times\dfrac{4}{9} \iff \dfrac{2x}{6} = \dfrac{12}{9} \iff \dfrac{x}{3} = \dfrac{4}{3} \iff x = 4$
   La solution de l'équation est 4.

2. $\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x} \iff x+\sqrt{x} = \sqrt{x} \iff x = 0$
   La solution de l'équation est $x = 0$.

3. $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{1}{2} = 0 \iff \dfrac{2(x-1)}{2x}-\dfrac{x}{2x} = 0 \iff \dfrac{2x-2-x}{2x} = 0 \iff \dfrac{x-2}{2x} = 0 \iff x = 2.$
   La solution de l'équation est 2.

4. $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 = 1 \iff \dfrac{(x-1)^2}{x^2} = 1 \iff \dfrac{(x-1)^2}{x^2} = \dfrac{x^2}{x^2}$.
   On résout $(x-1)^2 = x^2$ avec $x \neq 0$.
   $x^2-2x+1 = x^2 \iff -2x+1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
   L'équation a une solution $\dfrac{1}{2}$.

**☞Exercice 9** ✧✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^3 - x = 0 \iff x(x^2-1) = 0 \iff x(x-1)(x+1) = 0$
   $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.
   L'équation $x^3 - x = 0$ a trois solutions $\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$.

2. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{x} \iff \dfrac{x^2}{4x} = \dfrac{4}{4x}$
   On résout $x^2 = 4$ avec $x \neq 0$ (le dénominateur ne doit pas être nul).
   $x^2 = 4 \iff x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0$
   $x = 2$ ou $x = -2$.
   L'équation $\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{x}$ a deux solutions $\{-2\ ;\ 2\}$.

3. $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x}{x+2} \iff \dfrac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)}$
   On résout $x(x+1) = (x+1)(x+2)$ avec $x \neq -1$ et $x \neq -2$.
   $x(x+1) = (x+1)(x+2) \iff x^2 + x = x^2 + 3x + 2 \iff 2x + 2 = 0 \iff x = -1$
   Or $x$ doit être différent de $-1$ pour ne pas annuler le dénominateur.
   L'équation n'a pas de solution.

4. $\dfrac{x + \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{2}{5} \iff \dfrac{\frac{2x+1}{2}}{3} = \dfrac{2}{5} \iff \dfrac{2x+1}{6} = \dfrac{2}{5} \iff 5(2x+1) = 12 \iff 10x = 7 \iff x = \dfrac{7}{10} = 0,7$