

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.

Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.

Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.

savoir faire : travail autonome avec des stratégies d'auto-correction.

tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.

prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).



Tous les exercices peuvent se faire sans calculatrice, entraînez vous à calculer sans calculatrice.

I. Calcul de base

🌀 Exercice 1 ✧

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

1. $(x - 2)^2$

4. $(x - 6)(x + 6)$

2. $(x - 3)^2 + (x + 1)^2$

5. $(4x - 9)(4x + 9) - (4x + 9)^2$

3. $(4x - 5)^2 + (7x + 3)^2$

6. $(x + 5)^2 - (x - 10)^2$

🌀 Exercice 2 ✧✧

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

1. $8\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

3. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

2. $\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}\right)^2 - \left(\frac{2x}{3} + \frac{4}{7}\right)^2$

4. $(3x + \sqrt{5})^2$

🌀 Exercice 3 ✧

Factoriser les expressions suivantes :

1. $16x^2 - 8x + 1$

5. $18x^2 - 32$

2. $36x^2 - 49$

6. $-x^2 + 2x - 1$

3. $x^2 - 2x + 1$

7. $0,16x^2 - 0,25$

4. $x^2 + 10x + 25$

8. $-x^2 + 81$

🌀 Exercice 4 ✧✧

Factoriser les expressions suivantes :

1. $\frac{4x^2}{9} - 1$

3. $2x^2 - 3$

2. $25x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{400}$

4. $(4x - 1)^2 - (7x + 5)^2$

II. Montrer des identités

Exercice 5 ✦

Démontrer que pour tout réel x :

$$x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7$$

Exercice 6 ✦

Démontrer que pour tout réel x :

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = x(x - 1)$$

Exercice 7 ✦✦

Démontrer que pour tout réel x :

$$x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$$

Remarque $x^3 = x \times x \times x = x \times x^2$

Exercice 8 ✦✦

Identités de Legendre

a et b sont des nombres réels,

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

Si vous faites le parcours 3 choisissez de ne traiter qu'un seul des exercices 9 à 11

Exercice 9 ✦✦✦

Identité de Sophie Germain

Pour tous nombres réels x et y , on a :

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy) = ((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2).$$

Exercice 10 ✦✦✦

Identité de Gauss

a et b sont des nombres réels,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2].$$

Exercice 11 ✦✦✦

Identité de Lagrange

a, b, c, x, y et z sont des nombres réels,

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2.$$

Puis l'identité suivante :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2.$$

III. Résolution d'équations

Exercice 12 ✧

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 16 = 0$

2. $25x^2 = 64$

3. $x^2 - 2x + 1 = 0$

4. $49x^2 = 14x - 1$

Exercice 13 ✧✧

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 = 2$

2. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

3. $(x - 2)^2 - (2x + 1)^2 = 0$

4. $x^2 = (-x + 1)^2$



Exercice 1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

1. $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$
2. $(x - 3)^2 + (x + 1)^2 = x^2 - 6x + 9 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 10$
3. $(4x - 5)^2 + (7x + 3)^2 = 16x^2 - 40x + 25 + 49x^2 + 42x + 9 = 65x^2 + 2x + 36$
4. $(x - 6)(x + 6) = x^2 - 36$
5. $(4x - 9)(4x + 9) - (4x + 9)^2 = 16x^2 - 81$
6. $(x + 5)^2 - (x - 10)^2 = x^2 + 10x + 25 - (x^2 - 20x + 100) = x^2 + 10x + 25 - x^2 + 20x - 100 = 30x - 75$

Exercice 2

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

1. $8\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 8\left(\frac{x^2}{4} - x + 1\right) = 2x^2 - 8x + 8$
2. $\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}\right)^2 - \left(\frac{2x}{3} + \frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4x^2}{9} - \frac{16x}{21} + \frac{16}{49} - \left(\frac{4x^2}{9} + \frac{16x}{21} + \frac{16}{49}\right) = \frac{4x^2}{9} - \frac{16x}{21} + \frac{16}{49} - \frac{4x^2}{9} - \frac{16x}{21} - \frac{16}{49} = -\frac{32x}{21}$
3. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$
4. $(3x + \sqrt{5})^2 = 9x^2 + 6\sqrt{5}x + 5$

Exercice 3

Factoriser les expressions suivantes :

1. $16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2$
2. $36x^2 - 49 = (6x - 7)(6x + 7)$
3. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
4. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
5. $18x^2 - 32 = 2(9x^2 - 16) = 2(3x - 4)(3x + 4)$
6. $-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2$
7. $0,16x^2 - 0,25 = (0,4x - 0,5)(0,4x + 0,5) = 100(4x - 5)(4x + 5)$
8. $-x^2 + 81 = 81 - x^2 = (9 - x)(9 + x)$

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes :

1. $\frac{4x^2}{9} - 1 = \left(\frac{2x}{3} - 1\right)\left(\frac{2x}{3} + 1\right)$
2. $25x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{400} = \left(5x - \frac{1}{20}\right)^2$
3. $2x^2 - 3 = (x\sqrt{2} - \sqrt{3})(x\sqrt{2} + \sqrt{3})$
4. $(4x - 1)^2 - (7x + 5)^2 = (4x - 1 - (7x + 5))(4x - 1 + 7x + 5) = (-3x - 6)(11x + 4) = -3(x + 2)(11x + 4)$

Exercice 5 ✧

Démontrer que pour tout réel x :

$$x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7$$

En développant le membre de droite :

$$(x - 2)^2 - 7 = x^2 - 4x + 4 - 7 = x^2 - 4x - 3$$

On retrouve l'expression du membre de gauche.

Exercice 6 ✧

Démontrer que pour tout réel x :

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = x(x - 1)$$

En développant le membre central :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = x^2 - x$$

On retrouve l'expression du membre de gauche.

En factorisant le membre de gauche par x :

$$x^2 - x = x \times x - x \times 1 = x(x - 1)$$

On retrouve le membre de droite.

(autre méthode) On peut aussi factoriser le membre central :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)x = x(x - 1)$$

On retrouve le membre de droite.

Exercice 7 ✧✧

Démontrer que pour tout réel x :

$$x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$$

Remarque $x^3 = x \times x \times x = x \times x^2$

On peut factoriser le membre de gauche :

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

On retrouve le membre de droite.

(autre méthode) On peut aussi développer le membre de droite :

$$x(x - 1)(x + 1) = x(x^2 - 1) = x^3 - x$$

ou

$$x(x - 1)(x + 1) = (x^2 - x)(x + 1) = x^3 + x^2 - x^2 - x = x^3 - x.$$

Exercice 8 ✧✧**Identités de Legendre**

a et b sont des nombres réels,

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

On développe le membre de gauche :

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$$

On retrouve le membre de droite.

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

On développe le membre de gauche :

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

Exercice 12 ✦

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 16 = 0 \iff (x-4)(x+4) = 0$

$x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0$

$x = 4$ ou $x = -4$.

L'équation $x^2 - 16 = 0$ a deux solutions $\{-4; 4\}$.

2. $25x^2 = 64 \iff 25x^2 - 64 = 0 \iff (5x-8)(5x+8) = 0$

$5x - 8 = 0$ ou $5x + 8 = 0$

$x = \frac{8}{5}$ ou $x = -\frac{8}{5}$. L'équation $25x^2 - 64 = 0$ a deux solutions $\left\{-\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right\}$.

3. $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$

L'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ a une solution $\{1\}$.

4. $49x^2 = 14x - 1 \iff 49x^2 - 14x + 1 = 0 \iff (7x-1)^2 = 0 \iff 7x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{7}$

L'équation $49x^2 = 14x - 1$ a une solution $\left\{\frac{1}{7}\right\}$.**Exercice 13** ✦✦

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

$x - \sqrt{2} = 0$ ou $x + \sqrt{2} = 0$

$x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

L'équation $x^2 = 2$ a deux solutions $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

2. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

L'équation $x^2 - x + \frac{1}{4}$ a une solution $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3. $(x-2)^2 - (2x+1)^2 = 0 \iff (x-2-(2x+1))(x-2+2x+1) = 0 \iff (-x-3)(3x-1) = 0 \iff -(x+3)(3x-1) = 0$

$x + 3 = 0$ ou $3x - 1 = 0$

$x = -3$ ou $x = \frac{1}{3}$.

L'équation $(x-2)^2 - (2x+1)^2 = 0$ a deux solutions $\left\{-3; \frac{1}{3}\right\}$.

4. $x^2 = (-x+1)^2 \iff x^2 - (-x+1)^2 = 0 \iff (x - (-x+1))(x + (-x+1)) = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

L'équation $x^2 = (-x+1)^2$ a une solution $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.