Nombres et intervalles

Table des Matières

I. Ensembles de nombres 1

II. Intervalle de $\mathbb{R}$ 4

II. A. Définition et notation 4

II. B. Encadrement d'un nombre réel 5

II. C. Union et réunion d'intervalles 5

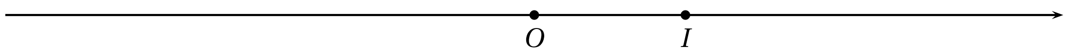
Nombres et intervalles

I. Ensembles de nombres

Pour les trois activités qui suivent l'unité vaut 2 cm.
L'axe des abscisses a pour d'origine O d'abscisse 0, le point I a pour abscisse 1.

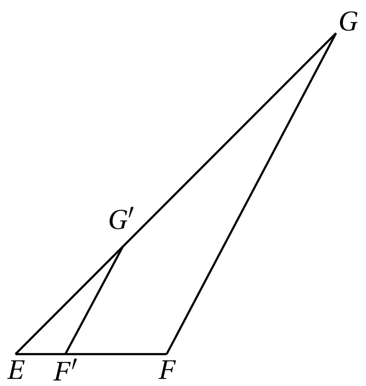
Activité 1

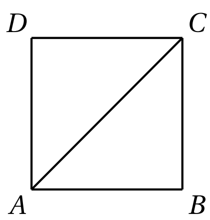
Placer sur l'axe ci-dessous les points M_1, M_2, M_3, M_4 d'abscisses respectives : $-2,5$; -2 ; $-1,8$; $\frac{13}{5}$



Activité 2

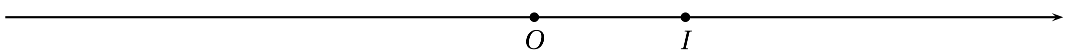
On considère les deux figures suivantes et l'axes des abscisses tels que :





$EG' = EF = 1$; $3EF = EG$ et $(FG)//(F'G')$

$ABCD$ est un carré et $AB = 1$

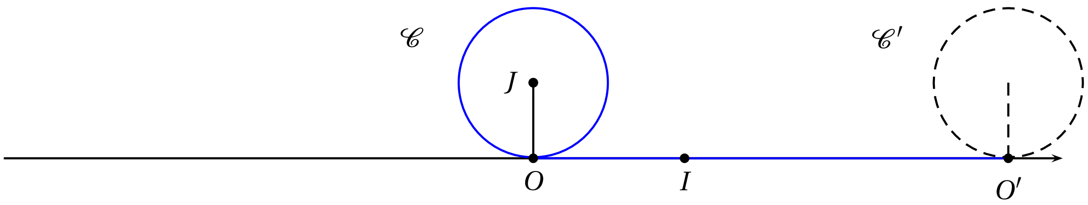


$OI = EF = AB = 1$.

1. Calculer la valeur exacte n_1 de la longueur EF'.
2. Calculer la valeur exacte n_2 de la longueur AC.
3. À l'aide d'un report de mesure (au compas), placer les nombres n_1 et n_2 sur l'axe des abscisses.
4. Ranger dans l'ordre croissant les nombres n_1, n_2 et 1.

☞**Activité 3**

Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\frac{1}{2} = 0,5$ tel que $(OJ) \perp (OI)$ et $OJ = 0,5$.



1. Calculer la valeur exacte n_3 du périmètre du cercle $\mathscr{C}$.
2. Le cercle $\mathscr{C}$ "roule vers la droite" sur l'axe des abscisses un tour complet, il revient pour la première fois à sa position initiale en O' (on obtient le cercle $\mathscr{C}'$). Quel est l'abscisse du point O' ?

Définition

- ***Les entiers naturels*** sont les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...
  L'ensemble des entiers naturels est $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...\}$, on le note $\mathbb{N}$.
- ***Les entiers relatifs*** sont les nombres entiers négatifs et les nombres entiers naturels ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...
  L'ensemble des entiers relatifs est $\{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...\}$, on le note $\mathbb{Z}$.
- ***Les nombres décimaux*** sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier relatif, et n un entier relatif.
  L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.
- ***Les nombres rationnels*** sont les nombres qui s'écrivent de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b est un entier relatif non nul.
  L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble de tous les nombres situés sur l'axe des abscisses constituent l'ensemble des ***nombres réels***. On note cet ensemble $\mathbb{R}$.
  Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont des sous-ensembles de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}$ il y a aussi des nombres radicaux (qui s'écrivent à partir d'une racine carrée comme par exemple $\sqrt{2}$), le nombre π dont une valeur approchée est 3,14, etc...
- Avec la notation $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ qui signifie que l'ensemble $\mathbb{A}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{B}$ (soit que tous les éléments de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{B}$), on a :
  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits irrationnels.

Exemple

- 1 est un entier naturel et relatif, il est aussi un nombre décimal puisqu'on peut l'écrire $\frac{1}{10^0}$, il est rationnel puisqu'on peut l'écrire $\frac{1}{1}$ et il est un nombre de l'axe des abscisses, il est donc réel.
- 0,33 n'est pas un entier, il est décimal puisqu'il s'écrit $\frac{33}{10^2}$. Puisqu'il est décimal, il est rationnel et réel.
- On démontrera en travaux dirigés que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. $\frac{1}{3}$ est rationnel et réel.
- On démontrera en travaux dirigés que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (il n'est donc pas décimal), il est réel.

☞**Exercice 1**

Compléter le tableau suivant en cochant la case qui détermine l'appartenance du nombre à un ensemble (sur votre cahier/classeur détailler les justifications) :

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$0{,}0502$					
$\sqrt{64}$					
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$					
$\dfrac{-4}{9}$					
$9{,}5 \times 10^{-5}$					

☞**Exercice 2**

Ranger dans l'ordre croissant les nombres réels suivants :

$\sqrt{2}$; 1 ; $-1{,}01$; $-1{,}2$; $\left(\dfrac{7}{4}\right)^2$; $-(\sqrt{2}-1)$; $5 \times \dfrac{3}{2}$.

☞**Exercice 3**

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation suivante :
   $-3x + 1 > 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Q}$ l'équation suivante :
   $(x+1)(5x-2) = 0$

II. Intervalle de $\mathbb{R}$

II. A. Définition et notation

Définition

Nom	Intervalle	Encadrement	Représentation
intervalle fermé en a et b	$[a\,;\,b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
intervalle ouvert en a et b	$]a\,;\,b[$	$a < x < b$	
intervalle fermé en a ouvert en b	$[a\,;\,b[$	$a \leqslant x < b$	
intervalle ouvert en a fermé en b	$]a\,;\,b]$	$a < x \leqslant b$	
intervalle fermé en a	$[a\,;\,+\infty[$	$a \leqslant x$	
intervalle ouvert en a	$]a\,;\,+\infty[$	$a < x$	
intervalle fermé en b	$]-\infty\,;\,b]$	$x \leqslant b$	
intervalle ouvert en b	$]-\infty\,;\,b[$	$x < b$	

Les quatre premiers intervalles sont dits bornés, les quatre suivants sont dits non bornés.
Le symbole ∞ se lit l'infini.

☞**Exercice 4**

Compléter le tableau suivant :

Nom	Intervalle	Encadrement	Représentation
			
	$[-1\ ;\ +\infty[$		
		$x < \pi$	
Intervalle ouvert en 2 et ouvert en 3			

II. B. Encadrement d'un nombre réel

Définition

a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.
On appelle ***amplitude*** d'un intervalle $[a\ ;\ b]$ la distance entre les nombres a et b soit $b - a$.

Exemple

- L'amplitude de l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ est 11.
- L'amplitude de l'intervalle $[2,14\ ;\ 2,15]$ est $0,01 = 10^{-2}$.

☞**Exercice 5**

1. Donner un encadrement d'amplitude 1 du nombre π, c'est à dire un intervalle d'amplitude 1 qui contient le nombre π.
2. À l'aide de l'affichage de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-6} du nombre π.
3. À l'aide de l'affichage de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude la plus petite possible du nombre π.
Salle π - audioguide du ***Palais de la découverte Paris***, les premières décimales de π

II. C. Union et réunion d'intervalles

Définition

Soit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux ensembles.

- ***L'intersection*** de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{A}$ et de $\mathbb{B}$, on note cet ensemble $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$.
- ***La réunion***, ou l'union de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{A}$ ou de $\mathbb{B}$, on note cet ensemble $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$.

✒ **Exemple**

On donne les deux ensembles suivants : $\mathbb{A} = \{1;5;10;23\}$ et $\mathbb{B} = \{0;1;10;12;15\}$.
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{1;10\}$,
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{0;1;5;10;12;15;23\}$.

☞**Exercice 6**

1. Soit les deux intervalles $I =]-2;5]$ et $J =]-\infty;0]$.
   (a) Quel est l'ensemble $I \cup J$?
   (b) Quel est l'ensemble $I \cap J$?
2. Quel est l'ensemble $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$? $\mathbb{Q} \cup Z$?