Travaux dirigés : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

I. Introduction

$\frac{1}{3} = 0{,}333\,33...$ est un nombre rationnel. L'écriture $0{,}333\,33...$ ne permet pas d'affirmer que ce nombre n'est pas décimal : un nombre qui a une infinité de chiffre après la virgule peut être un nombre décimal.
En effet $0{,}999\,99... = 1$ est un nombre décimal (puisqu'il est entier) et il admet une écriture avec une infinité de chiffre après la virgule.

Démonstration 1 ✧

Soit le nombre réel $n = 0{,}999\,99...$

1. Justifier que n vérifie l'égalité $10n = 9 + n$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10x = 9 + x$.
3. Que déduire du nombre $0{,}999\,99...$?

Démonstration 2 ✧

Soit $n = \frac{1}{3} = 0{,}333\,33....$

1. Calculer $3 \times 0{,}333\,33...$ et $3 \times \frac{1}{3}$.
2. Que peut-on en déduire ?

Démonstration 3 ✧✧✧

Soit $x = 0{,}999\,99.....$ raisonnons par l'absurde.
Proposition $\mathscr{P}$: $x < 1$. Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ (le contraire de $\mathscr{P}$) est vraie.
Supposons $\mathscr{P}$ vraie.
La moyenne arithmétique m de x et 1 est telle que : $x < m < 1$.
Par conséquent on a la succession des inégalités suivantes :

- $0{,}9 < m < 1$: de cette inégalité on conclut que la première décimale de m est 9.
- $0{,}99 < m < 1$: de cette inégalité on conclut que la deuxième décimale de m est 9.
- ect.

Conclusion : $m = 0{,}99999... = x$ or $x < m$.
Par contradiction, la proposition $\mathscr{P}$ est fausse donc la négation de $\mathscr{P}$ est vraie soit $x \geq 1$.
Comme $0{,}99999...$ n'est pas strictement supérieur à 1, nécessairement $x = 1$.
Remarque : on peut conclure aussi le raisonnement par $m = \frac{x+1}{2} = x$ soit $x = 1$.

Remarque

Tous les nombres entiers admettent deux écritures décimales illimitées dès lors que
$1 = 1{,}00\,000....$ et $1 = 0{,}999\,99....$

II. Démonstration : $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

☞**Démonstration 4** ✧✧

Raisonnons par l'absurde.

Soit la proposition $\mathscr{P}$: $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ (la proposition contraire de $\mathscr{P}$) est vraie.

Supposons $\mathscr{P}$ vraie.

Par définition il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

1. Montrer que 10 est multiple de 3.
2. À quelle contradiction aboutit-on ?
3. Conclure sur le raisonnement.

☞**Démonstration 5** ✧✧

Raisonnons par l'absurde.

Soit la proposition $\mathscr{P}$: $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal c'est à dire que $\frac{1}{3} = 0{,}333\,33\ldots3$ (le nombre de chiffre après la virgule est fini).

Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ est vraie.

Supposons $\mathscr{P}$ vraie.

1. Calculer $3 \times \frac{1}{3}$ et $3 \times 0{,}333\,33\ldots3$.
2. À quelle contradiction aboutit-on ?
3. Conclure sur le raisonnement.