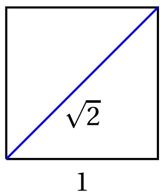
☙✿ Travaux dirigés : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ✿❧

I. Introduction

☞**Activité 1**

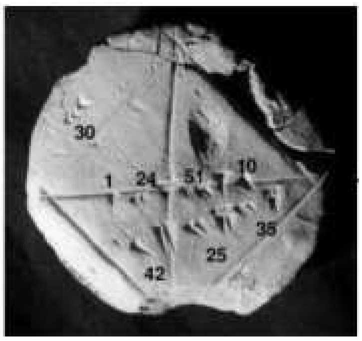
1. Répondre à la question de Platon à Aristote : comment dupliquer l'aire d'un carré de côté 1 ?



✒ **Remarque**

Soit un carré de côté a, le rapport de la longueur de la diagonale par le côté est $\sqrt{2}$, il ne dépend pas de a.

Les Babyloniens ont cherché à approcher $\sqrt{2}$, ils trouvèrent l'approximation suivante (en base 60) :



$1+\dfrac{24}{60}+\dfrac{51}{60^2}+\dfrac{10}{60^3}$

(a) Donner le nombre rationnel correspondant au calcul $1+\dfrac{24}{60}+\dfrac{51}{60^2}+\dfrac{10}{60^3}$

(b) En comparant les valeurs approchées de la calculatrice de $1+\dfrac{24}{60}+\dfrac{51}{60^2}+\dfrac{10}{60^3}$ et $\sqrt{2}$, quelle est la précision d'approximation de $\sqrt{2}$ obtenue par les Babyloniens ? Donner cette valeur arrondi de $\sqrt{2}$.

II. Démonstration : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

☞**Démonstration 1** ✧

Raisonnons par l'absurde.
Proposition $\mathscr{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel.

Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ est vraie.

Si $\mathscr{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$; p et q plus petits possibles (la fraction est irréductible).

1. Écrire p^2 en fonction de q^2.
2. Du dernier chiffre possible de p et de q on peut en déduire le dernier chiffre possible de p^2 et $2q^2$.
   Compléter le tableau :

dernier chiffre possible de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
dernier chiffre possible dep^2	0	1	4	9	6	5				
dernier chiffre possible de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre possible de$2q^2$	0	2	8	8	2					

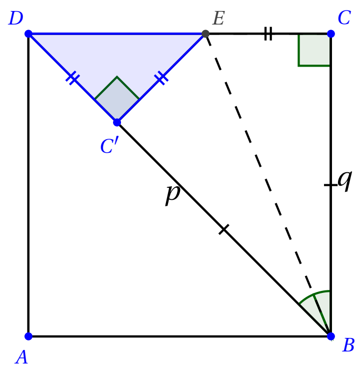
3. A quelle contradiction aboutit-on ?
4. Conclure sur le raisonnement.

☞**Démonstration 2** ✧

Raisonnons par l'absurde.
Proposition $\mathscr{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel.

Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ est vraie.

Si $\mathscr{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$; p et q plus petits possibles.
ABCD est un carré de côté q. La diagonale du carré mesure p.



1. Par manipulation, si on replie le côté $[BC]$ sur la diagonale $[BD]$ on obtient le triangle rectangle isocèle (un demi-carré) DEC'.
   Quelles sont les longueurs des côtés du triangle DEC' ?
2. En déduire $\sqrt{2} = \dfrac{2q-p}{p-q}$. Écrire la contradiction obtenue.
3. Conclure sur le raisonnement.

III. Approximation de $\sqrt{2}$ par l'algorithme de dichotomie

☞**Activité 2**

1. ***Algorithme de dichotomie***

   $a \leftarrow 1$

   $b \leftarrow 2$

   Tant que $b - a > 10^{-n}$ faire

       $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$

       Si $m^2 > 2$ alors

           $b \leftarrow m$

       Sinon

           $a \leftarrow m$

       Fin si

   Fin Tant que

   Le tableau ci-dessous à recopier et à compléter permet de déterminer les valeurs de a, b et m au fur et à mesure de l'exécution de l'algorithme (on choisira $n = 2$).
   Donner l'encadrement de $\sqrt{2}$ obtenu à la fin de l'algorithme pour $n = 1$.

Étapes	a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	m^2
0	1	2		
1				

2. Mettre en place le tableau sur tableur :

	A	B	C	D	E
1	Étapes	a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	m^2
2	0	1	2		
3	1				

   (a) Quelle formule, adaptées au glisser-coller vers le bas, doit-on saisir en cellule B3 ? C3 ? D2 ? E2 ?

   (b) Donner l'encadrement de $\sqrt{2}$ obtenu à la fin de l'algorithme pour $n = 4$.

3. Traduction de l'algorithme sur Python

   (a) recopier le programme suivant et vérifier le résultat obtenu sur tableur.

```python
#approximation de racine de 2 par dichotomie

from math import*                 #importation du module de mathématiques

def approxi(n):                   #la fonction approxi dépend d'un paramètre n
    a=1                           #initialisation de la variable a
    b=2                           #initialisation de la variable b
    while b-a>pow(10,-n):         #boucle tant que, pow(A,B) pour A puissance B
        m=(a+b)/2                 #calcul de la valeur milieu
        if pow(m,2)>2:            #condition si
            b=m
        else :                    #sinon
            a=m
    return [a,b]                  #retourne la liste de deux éléments a et b, fin de fonction

print(approxi(4))                 #affiche le résultat d'approxi pour n=4
```

racine2.py

   (b) À quelle étape a-t-on un encadrement de $\sqrt{2}$ qui contient la valeur approchée donnée par la calculatrice ?