Identités remarquables

Stéphane Mirbel

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Développement :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Factorisation :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Les identités remarquables : exemples

Développer ou factoriser : $(3x-1)^2 = ?$

L'expression est un produit , on peut développer le produit.

On reconnait la forme $(a-b)^2$ et $a = 3x$ et $b = 1$.

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (3x-1)^2 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 \\ &= 9x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

Les identités remarquables : exemples

Développer ou factoriser : $49x^2 - 25 = ?$

L'expression est une somme (ou différence) , on peut factoriser la somme.

On reconnait la forme $a^2 - b^2$ avec $a^2 = 49x^2 = (7x)^2$ et $b^2 = 25 = 5^2$.

On peut poser $a = 7x$ et $b = 5$.

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\
49x^2 - 25 &= (7x-5)(7x+5)
\end{aligned}
$$

Les identités remarquables : exemples

Développer ou factoriser : $(2x+3)^2-(4x-5)^2$ =?
L'expression est une somme (ou différence) , on peut factoriser la somme.
On reconnait la forme a^2-b^2 avec $a^2=(2x+3)^2$ et $b^2=(4x-5)^2$ on peut poser $a=2x+3$ et $b=4x-5$.

$$\begin{aligned}
a^2-b^2 &= (a-b)(a+b)\\
(2x+3)^2-(4x-5)^2 &= [(2x+3)-(4x-5)][(2x+3)+(4x-5)]\\
&= [2x+3-4x+5][2x+3+4x-5]\\
&= (-2x+8)(6x-2)\\
&= 4(-x+4)(3x-1)
\end{aligned}$$

Remarque :
$4(-x+4)(3x-1)=4(-3x^2+x+12x-4)=4(-3x^2+13x-4)$.

Les identités remarquables : exemples

Développer ou factoriser : $(2x+3)^2-(4x-5)^2=?$
On peut aussi développer les deux termes de la somme : On reconnait les formes $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ et } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$\begin{aligned}(2x+3)^2-(4x-5)^2 &= (4x^2+12x+9)-(16x^2-40x+25)\\ &= 4x^2+12x+9-16x^2+40x-25\\ &= -12x^2+52x-16\\ &= 4(-3x^2+13x-4)\end{aligned}$$

Exemple d'application : résolution d'équations

On cherche à résoudre $49x^2 - 25 = 0$.
On peut, par exemple, factoriser et utiliser la règle d'un produit nul (un produit est nul si et seulement si au moins un facteur est nul) :

$$\begin{array}{rcll}
49x^2 - 25 = 0 & \iff & (7x-5)(7x+5) = 0 & \\
& \iff & \text{soit } 7x-5=0 & \text{soit } 7x+5=0 \\
& \iff & \text{soit } 7x=5 & \text{soit } 7x=-5 \\
& \iff & \text{soit } x=\dfrac{5}{7} & \text{soit } x=-\dfrac{5}{7} \\
& \iff & x \in \left\{-\dfrac{5}{7}\,;\,\dfrac{5}{7}\right\} &
\end{array}$$

Exemple d'application : résolution d'équations

On cherche à résoudre $(2x+3)^2-(4x-5)^2=0$.
La forme développée donne $-12x^2+52x-16=0$ et la forme factorisée donne $4(-x+4)(3x-1)=0$.
On peut, par exemple, utiliser là aussi la forme factorisée et la règle d'un produit nul (un produit est nul si et seulement si au moins un facteur est nul) :

$$\begin{array}{rcll}
(2x+3)^2-(4x-5)^2=0 & \iff & 4(-x+4)(3x-1)=0 & \\
 & \iff & \text{soit } -x+4=0 & \text{soit } 3x-1=0 \\
 & \iff & \text{soit } x=4 & \text{soit } x=\dfrac{1}{3} \\
 & \iff & x\in\left\{\dfrac{1}{3}\ ;\ 4\right\} &
\end{array}$$

FIN