Identités remarquables

Table des Matières

☙✿ Identités remarquables ✿❧

I. Caractérisations

☞**Activité 1**

Proposition : pour tous nombres réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
Est-ce que cette proposition est vraie ?

☞**Activité 2**

Les identités remarquables selon al Khwarizmi.
Dans son ouvrage Kitâb al-jabr wa al-muqâbala, " Le livre du rajout et de l'équilibre ", l'astronome et mathématicien perse al Khwarizmi présente sa méthode de résolution des équations (muadala).
Il formule ce qui sera appelé les identités remarquables ainsi que la règle des signes sans justifications.
Voici un extrait p27-30 qui présente sur des exemples les trois identités remarquables avec un partie des traductions algébriques.
Compléter les traductions manquantes.

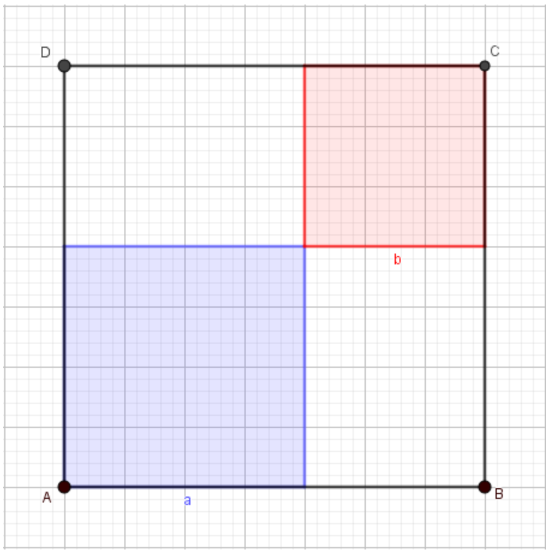
Le texte	traduction algébrique
Et si on dit : dix et une chose par elle-même.	$(10+x)(10+x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	$10 \times 10 = 100$
et dix par une chose : dix choses,	$10x$
et dix par une chose : dix choses également,	$10x$
et une chose par une chose : un bien ajouté.	x^2
Cela sera cent dirhams et vingt choses et un bien ajouté.	$100 + 20x + x^2$
Et si on dit : dix moins une chose par dix moins une chose.	$(10-x)(10-x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	
et moins une chose par dix : dix choses retranchées,	
et moins une chose par dix : dix choses retranchées,	
et moins une chose par moins une chose : un bien ajouté.	
Cela sera cent dirhams et un bien moins vingt choses.	
Et si on dit : dix moins une chose par dix et une chose.	$(10+x)(10-x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	$10 \times 10 = 100$
et moins une chose par dix : dix Choses retranchées,	$-10x$
et une chose par dix : dix choses ajoutées,	$10x$
et moins une chose par une chose : un bien retranché.	$-x^2$
Tu auras : cent dirhams moins un bien.	$100 - x^2$

☞**Activité 3**

1. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs :

   (a) Exprimer l'aire du carré ABCD en fonction de a et b.

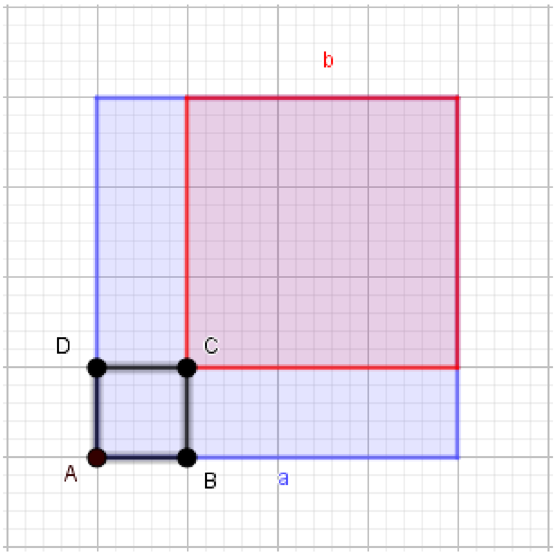
   (b) Développer $(a+b)^2$. Que représente l'expression $2ab$ sur la figure ?



2. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs (ici $a > b$):

   (a) Exprimer l'aire du carré ABCD en fonction de a et b.

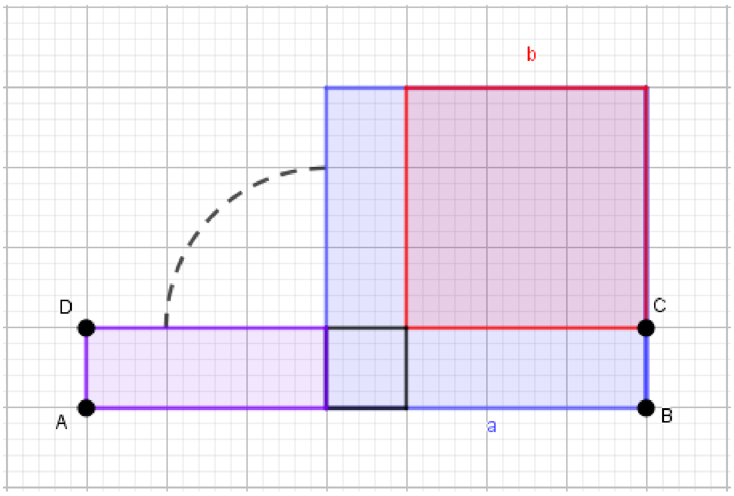
   (b) Développer $(a-b)^2$. Que représente l'expression $2ab$ sur la figure ?



3. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs (ici $a > b$):

   (a) Exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de a et b.

   (b) Développer $(a-b)(a+b)$. Dans le carré de côté a, hachurer l'aire d'expression $a^2 - b^2$.



✒ Définition

On appelle identités remarquables les résultats suivants, pour tous les réels a et b :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

☞Exercice 1

1. Développer et simplifier les expressions suivantes :
   (a) $(5x-1)^2$
   (b) $(7x+9)(7x-9)$
   (c) $(7x+5)^2$
   (d) $3(2x-1)^2$
   (e) $2(6x+1)^2 - (x-1)(x+1)$
   (f) $(0,5x+1)^2 - (0,5x-3)^2$
2. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $x^2 + 4x + 4$
   (b) $36x^2 - 49$
   (c) $81x^2 - 18x + 1$
   (d) $121x^2 + 66x + 9$
   (e) $0,04x^2 - 25$
   (f) $(0,5x+1)^2 - (0,5x-3)^2$

☞Exercice 2

Pour aller plus loin :

Soient a, b et c trois nombres réels.

Développer :

1. $(a+b)^3$.
   indication : Remarquer que $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$.
2. $(a+b+c)^2$
   indication : Remarquer que $(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2$, on pourra aussi poser $a+b=d$ et développer dans un premier temps $(d+c)^2$.

II. Applications des identités remarquables

II. A. Calcul mental

☞Exercice 3

1. Avec l'identité remarquable appropriée développer $(30-2)^2$. En déduire la valeur de 28^2.
2. Calculer mentalement : 99^2 ; 31^2 ; 25×35 ; $75^2 - 25$.

II. B. Résolution d'équations

✒ Propriété

Le produit de deux nombres réels a et b est nul si et seulement si $a=0$ ou $b=0$.

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

☞Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $36x^2 - 12x + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 9 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $0,25x^2 + 2x = -4$

III. Démontrer des identités de Mathématicien(ne)s

☞**Exercice 5**

Justifier par des calculs les identités suivantes :

choisir un membre de l'égalité (gauche ou droite) et par des calculs obtenir l'autre membre de l'égalité.

III. A. Deux identités de Legendre

a et b sont des nombres réels,

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2\left(a^2+b^2\right)$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

III. B. Identité de Sophie Germain

Pour tous nombres réels x et y, on a :

$$x^4+4y^4=\left(x^2+2y^2\right)^2-4x^2y^2=\left(x^2+2y^2-2xy\right)\left(x^2+2y^2+2xy\right)=\left((x+y)^2+y^2\right)\left((x-y)^2+y^2\right).$$