géométrie du plan

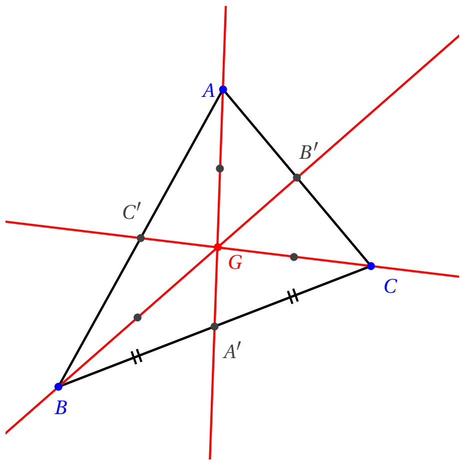
Table des Matières

I. Complément sur les triangles

I. A. Médianes d'un triangle

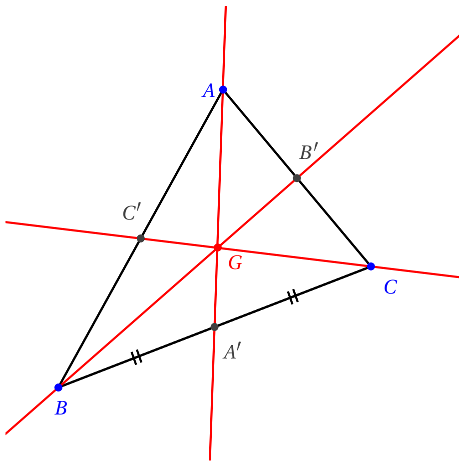
Définition

ABC est un triangle.
La ***médiane*** d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.



Théorème

ABC est un triangle.
Les trois médianes d'un triangles sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle.
De plus $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$



Démonstration 1

ABC est un triangle et A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Soit le point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$

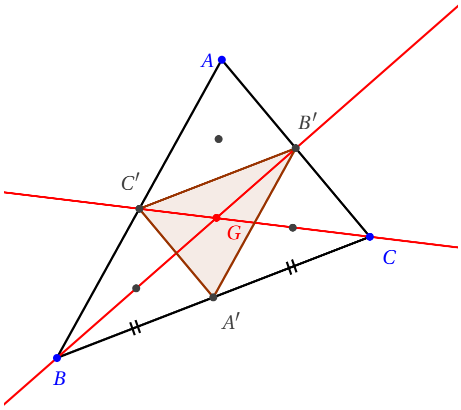
1. Montrer que $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, puis que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
2. Démontrer que A', M et A sont alignés.
3. De la même manière, montrer que B', M et B sont alignés, puis que C', M et C sont alignés.
4. Conclure.

Remarque

Il existe une démonstration niveau collège qui utilise les parallélogrammes.

☞**Exercice 1**

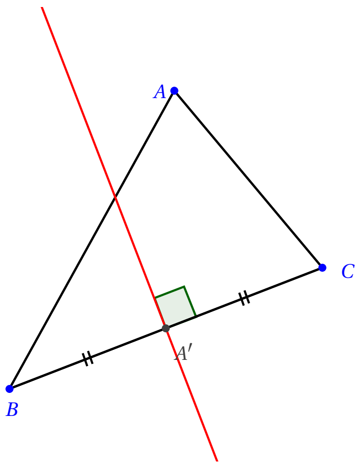
ABC est un triangle et A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Démontrer que le centre de gravité du triangle ABC est aussi le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.



I. B. Médiatrices d'un triangle et Cercle circonscrit à un triangle

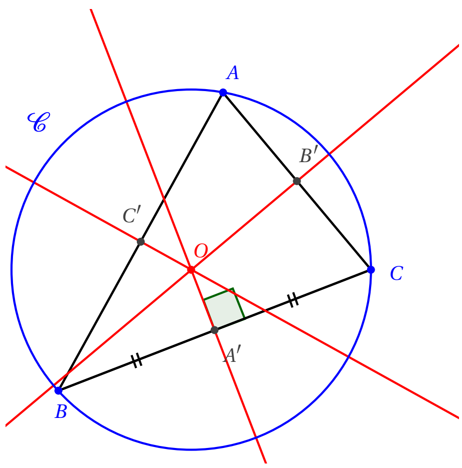
Définition

ABC est un triangle.
La ***médiatrice*** d'un triangle est la médiatrice d'un côté du triangle, c'est à dire la droite passant par le milieu du côté et perpendiculaire à ce côté.



Théorème

ABC est un triangle.
Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (le cercle passant par les sommets du triangle).



☞**Démonstration 2**

1. Construire un triangle ABC et placer les milieux A', B' et C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le reste de la figure sera construit au fur et à mesure de la démonstration.

2. Démontrer que les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ sont nécessairement concourantes en un point O.

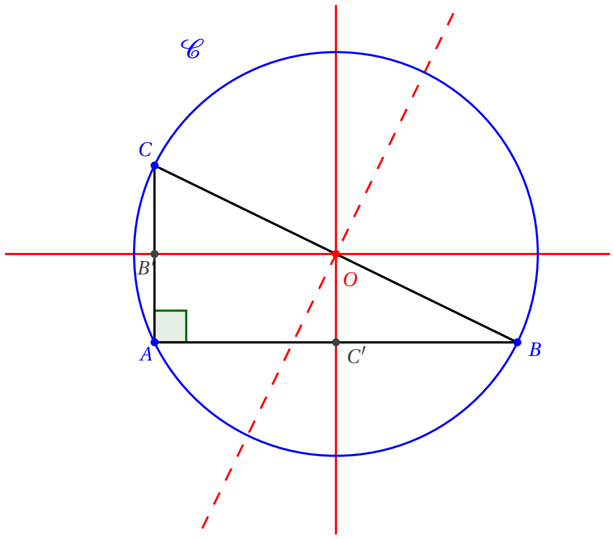
3. En déduire $OA = OC$ puis $OA = OB$.

4. En déduire que O est le point de concours des trois médiatrices et O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

✒ **Théorème**

- Si un triangle ABC est rectangle en A alors le point d'intersection des médiatrices est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ (autrement dit l'hypoténuse $[BC]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC).

- réciproquement, Si un cercle $\mathscr{C}$ a pour diamètre $[BC]$ et A est un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct de B et C alors le triangle ABC est rectangle en A.



☞**Démonstration 3**

Faire deux figures à compléter au fur et à mesure de la démonstration.

1. ABC est un triangle rectangle en A. A', B' et C' sont les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

   (a) Démontrer que la médiatrice du segment $[AB]$ passe par A'.

   (b) Démontrer que la médiatrice du segment $[AC]$ passe par A'.

   (c) En déduire que $O = A'$.

2. Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $[BC]$ et A un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct de B et C. B' et C' sont les milieux des segments $[AC]$ et $[AB]$.

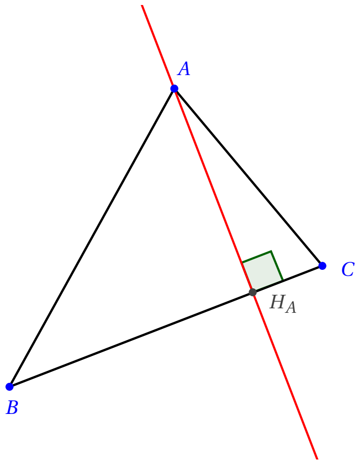
   (a) Démontrer que les droites (OC') et (AC) sont parallèles.

   (b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

I. C. Hauteurs dans un triangle

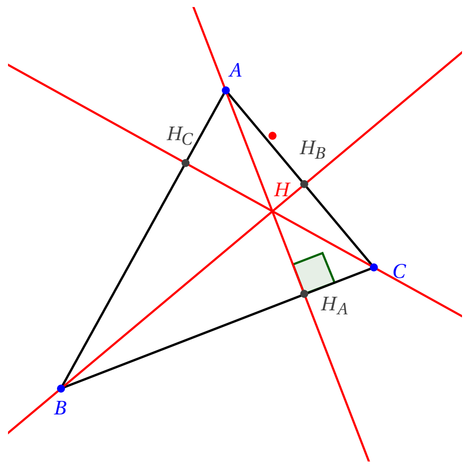
Définition

ABC est un triangle.
La ***hauteur*** d'un triangle est une droite perpendiculaire à un côté du triangle et passant par le sommet opposé.
L'intersection de la hauteur avec le côté est appelé pied de la hauteur.



Théorème

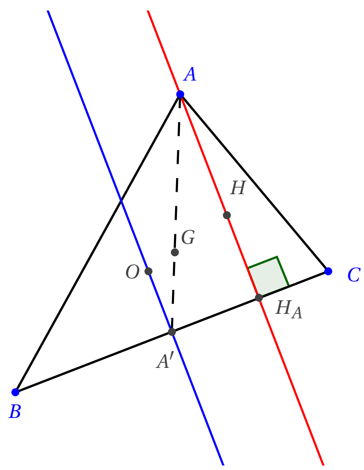
ABC est un triangle.
Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un point H appelé orthocentre du triangle ABC.



Démonstration 4

ABC est un triangle et H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C, A', B' et C' sont les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et G est le centre de gravité du triangle ABC.
Soit le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

1. Montrer que $\overrightarrow{AM}=2.\overleftarrow{OA'}$
2. En déduire que M appartient à la hauteur issue de A.
3. De la même manière en déduire que M est un point de la hauteur issue de B, puis un point de la hauteur issue de C ; c'est à dire que les hauteurs se coupent en M.
   Dans le suite de l'exercice M sera noté H, l'orthocentre du triangle ABC.
4. Démontrer que $3.\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}$. Que peut-on en déduire sur les points O, M et G ? (on rappelle que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.)



Remarque

Un triangle est équilatérale si et seulement si le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont confondus.

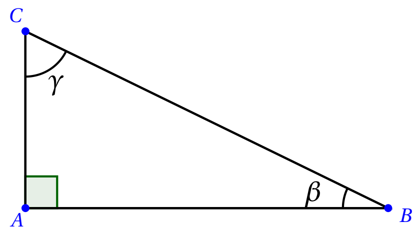
I. D. Relations dans un triangle

I. D. 1. Trigonométrie

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le cosinus (cos), le sinus (sin) et la tangente tan) de l'angle $\beta = \widehat{ABC}$ ou $\gamma = \widehat{BCA}$:

- $\cos(\beta) = \dfrac{AB}{BC}$
- $\sin(\beta) = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan(\beta) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$
- $\cos(\gamma) = \dfrac{AC}{BC}$
- $\sin(\gamma) = \dfrac{AB}{BC}$
- $\tan(\gamma) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)}$

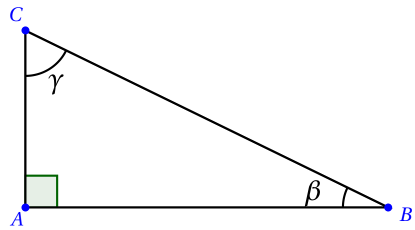


Théorème

Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le cosinus (cos), le sinus (sin) et la tangente tan) de l'angle $\beta = \widehat{ABC}$ ou $\gamma = \widehat{BCA}$:

$$\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1 \qquad 1 + tan^2(\beta) = \frac{1}{\cos^2(\beta)}$$

$$\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) = 1 \qquad 1 + tan^2(\gamma) = \frac{1}{\cos^2(\gamma)}$$



Démonstration 5

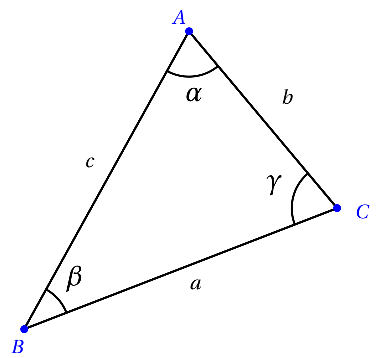
Démontrer le théorème c'est à dire démontrer que $\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1$ et que $1 + tan^2(\beta) = \dfrac{1}{\cos^2(\beta)}$

I. D. 2. Relations métriques : Al-Kashi

Théorème

(***théorème d'Al-Kashi***)
ABC est un triangle, $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$ avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

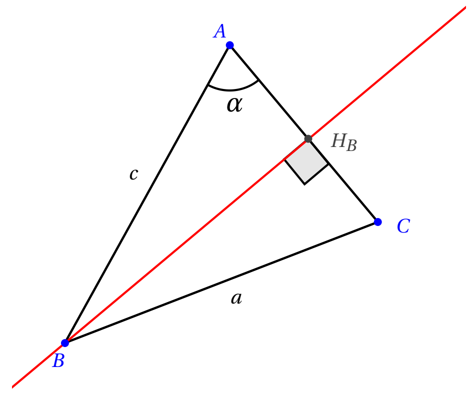
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
- $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos(\gamma)$



☞**Démonstration 6**

Soit la hauteur issue de B et H_B son pied de la hauteur. On note $h = AH_B$ (et $b = AC$).

- Exprimer a^2 en fonction de h^2 et $CH_B{}^2$.
- En déduire $a^2 = c^2 + b^2 - 2b \times AH_B$.
- En déduire $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\alpha)$

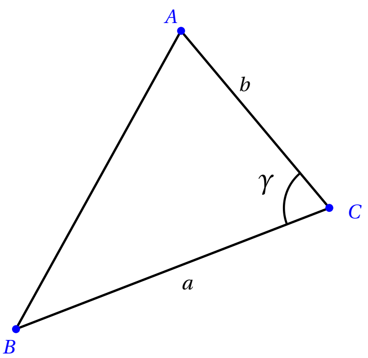


I. D. 3. Aire d'un triangle

Théorème

Soit ABC un triangle tel que $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, $\gamma = \widehat{ACB}$.
L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est

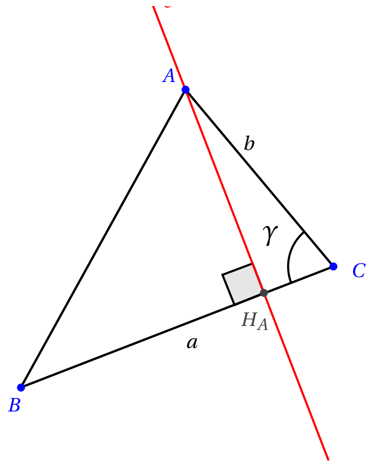
$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$$



☞**Démonstration 7**

Soit la hauteur issue de A et H_A son pied.

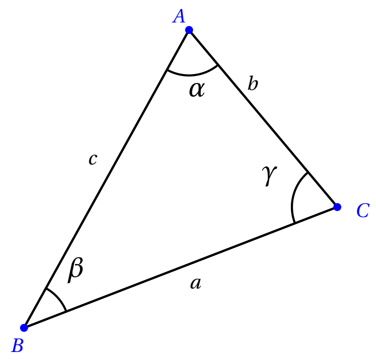
1. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC en fonction de a et AH_A.
2. En déduire $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}ab\cos(\gamma)$.



Corollaire

Soit ABC un triangle tel que $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, $\gamma = \widehat{ACB}$.
On note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC.

$$\frac{abc}{2\mathscr{A}} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



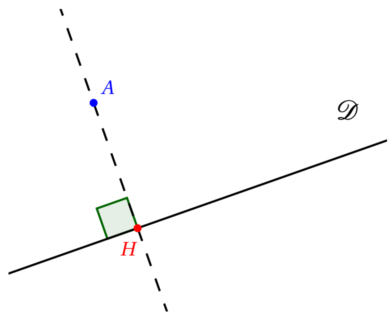
Démonstration 8

Démontrer le corollaire en utilisant le résultat du théorème.

II. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition

Soit un point A et une droite $\mathscr{D}$ du plan.
On appelle projeté orthogonal H du point A sur la droite $\mathscr{D}$ le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec la perpendiculaire à D passant par A.

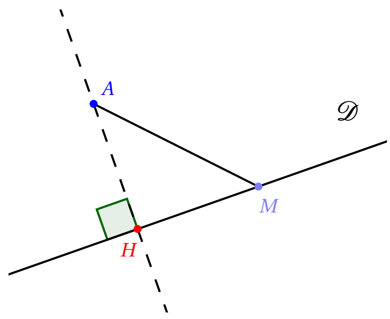


Remarque

Si A est un point de la droite $\mathscr{D}$ alors le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$ est le point A.

Propriété

Soit un point A et une droite $\mathscr{D}$ du plan.
Si M est un point de $\mathscr{D}$ la plus courte distance de AM est réalisée pour $M = H$ avec H projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.



Démonstration 9

Laissée en exercice : disjonction des cas $M \neq H$ et $M = H$ dans le cas où $A \notin \mathscr{D}$.