Fonction inverse

Table des Matières

Fonction inverse

I. Fonction impaire

Définition

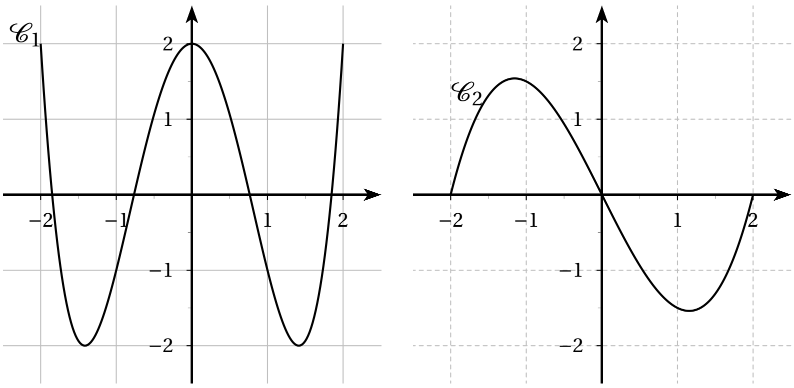
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathbb{E}$.
Une fonction f est dite impaire si et seulement si pour tout réel x de $\mathbb{E}$ $f(-x) = -f(x)$.

Propriété

Soit un repère orthogonal $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f impaire admet l'origine O comme centre de symétrie.

Exercice 1

Les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ suivantes représentent deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $[-2\,;\,2]$.
Laquelle de ces deux fonctions est impaire ?
Pour mettre en évidence la symétrie de centre O, placer un point A d'abscisse a n'importe où sur la courbe et son symétrique A' d'abscisse $a' = -a$, vérifier $f(-a) = -f(a)$.



II. Définition et propriété

Définition

On appelle fonction inverse f, la fonction qui au nombre réel x non nul, associe le nombre réel $\frac{1}{x}$.

$$f:\ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

.

Propriétés

- Si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$ et si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} < 0$.
- La fonction inverse est impaire.

Démonstration 1

- évident,
- Pour tout réel x non nul, calculer $f(-x)$ et conclure avec la définition d'une fonction paire.

III. Étude des variations de la fonction inverse

Théorème

La fonction inverse f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Démonstration 2

1. ✧✧ Soient deux nombres réels a et b tels que $a<b$.
Comparer a^2 et b^2 en étudiant le signe de a^2-b^2 (on pensera à factoriser).

2. ✧ Compléter la structure de la démonstration :
Compléter la structure de la démonstration :
On choisit $a<b$, et on souhaite comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$. Deux cas d'études se déclineront au cours de l'étude du signe de $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ qui donnera l'ordre de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.
Pour tout nombre a et b, $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{\dots\dots\dots\dots}{ab}$.

sur $]-\infty\,;\,0[$	sur $]0\,;\,+\infty[$
$a<b<0$	$0<a<b$
$b-a$........0	$b-a$........0
ab........0	ab........0
$\dfrac{b-a}{ab}$........0	$\dfrac{b-a}{ab}$........0
$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$........0	$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$........0
$\dfrac{1}{a}$........$\dfrac{1}{b}$	$\dfrac{1}{a}$........$\dfrac{1}{b}$
l'ordre entre (a et b) et ($\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$)	l'ordre entre (a et b) et ($\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$) ....
la fonction inverse est .... sur	la fonction inverse est .... sur ....

Exercice 2

Lorsque c'est possible, à partir des variations de la fonction inverse, comparer les nombres suivants :

1. $\frac{1}{1,15}$ et $\frac{1}{1,16}$;
2. $\frac{1}{-2013}$ et $\frac{1}{-2014}$;
3. $\frac{1}{(-1,2)^2}$ et $\frac{1}{(-1,3)^2}$;
4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et 1 ;
5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{3}$;
6. $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$ et $\dfrac{3}{2}$.

IV. Représentation graphique de la fonction inverse

IV. A. Table de valeurs

Avec la propriété de parité de la fonction inverse, on peut ne donner les valeurs que pour x positif, les valeurs négatives s'en déduisent.

x	0	0,25=$\frac{1}{4}$	0,5=$\frac{1}{2}$	1	1,5=$\frac{3}{2}$	2	2,5=$\frac{5}{2}$	3	4	5
$f(x)$										

IV. B. Représentation graphique :

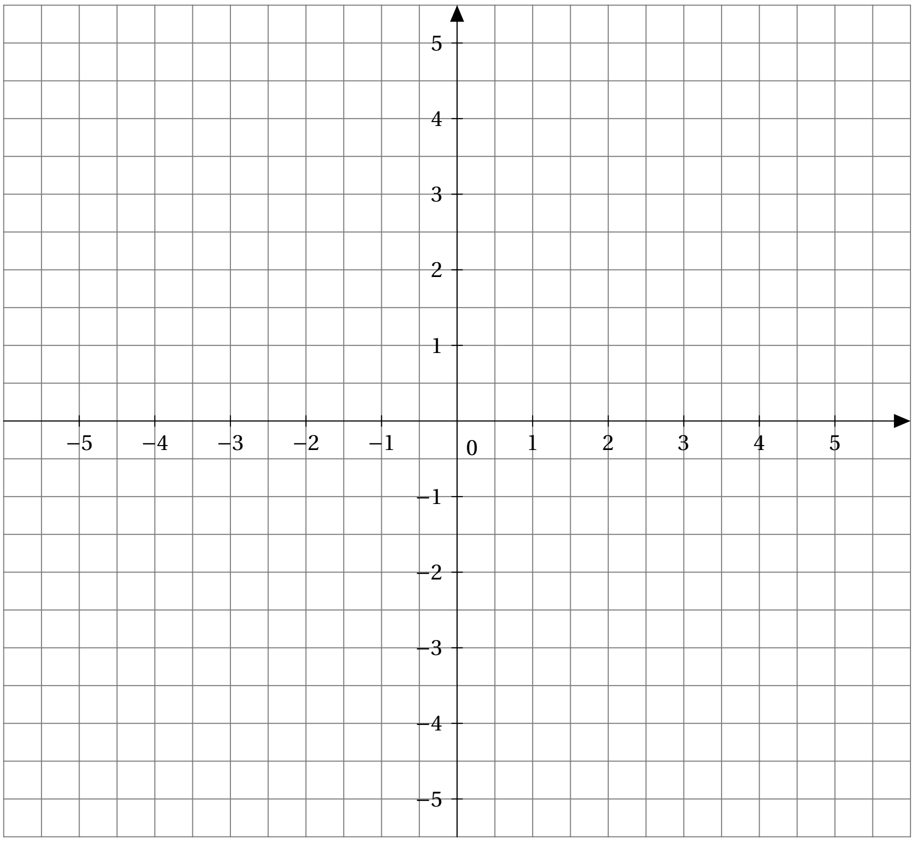
Définition

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ de la fonction inverse est appelée hyperbole.
Son équation est $y = \frac{1}{x}$.

Propriété

Soit un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
L'hyperbole admet l'axe des origine O comme centre de symétrie.

Graphe de la fonction inverse :



Retrouver les variations de la fonction carré par lecture graphique en cliquant sur le lien.

☞**Exercice 3**

A partir de la lecture graphique de la courbe C,

1. Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = 3$ (on donnera la valeur exacte).
   représentation graphique
2. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} < 1$.
   représentation graphique
3. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} > \frac{3}{2}$.
   représentation graphique
4. Quel est le maximum de $\frac{1}{x}$ pour x dans l'intervalle $[0,5;4]$.
   représentation graphique
5. Quel est le minimum de $\frac{1}{x}$ pour x dans l'intervalle $[-2;-0,25]$.
   représentation graphique