fonction carré

Table des Matières

fonction carré

I. Fonction paire

Définition

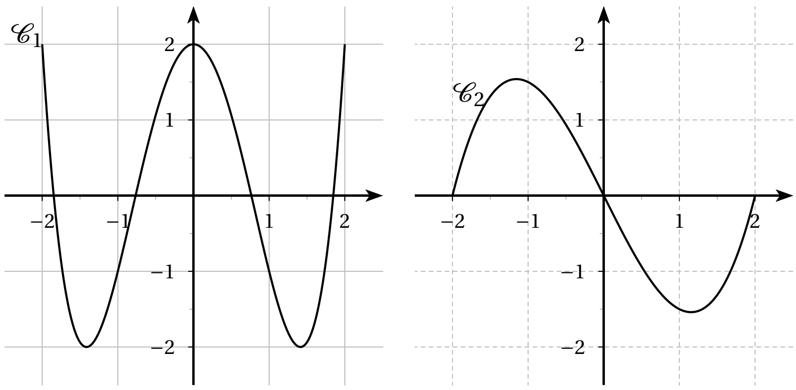
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathbb{E}$.
Une fonction f est dite paire si et seulement si pour tout réel x de $\mathbb{E}$ $f(-x) = f(x)$.

Propriété

Soit un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f paire admet l'axe $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ (l'axe des ordonnées) comme axe de symétrie.

Exercice 1

Les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ suivantes représentent deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $[-2\,;\,2]$.
Laquelle de ces deux fonctions est paire ?
Pour mettre en évidence la symétrie d'axe l'axe des ordonnées, placer un point A d'abscisse a n'importe où sur la courbe et son symétrique A' d'abscisse $a' = -a$, vérifier $f(a) = f(-a)$.



II. Définition et propriété

Définition

On appelle fonction carré f, la fonction qui au nombre réel x associe le nombre réel x^2.

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & y = f(x) = x^2\end{array}$$

.

✒ Propriétés

- Pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$.
- 0 admet un seul antécédent par la fonction carré, le nombre 0. Autrement dit, $x^2 = 0$ admet une seule solution réelle $x = 0$.
- La fonction carré est paire.

☞Démonstration 1

- Évident, par disjonction de deux cas : $x > 0$ et $x < 0$ et $x = 0$.
- Se déduit du point précédent.
- Pour tout réel x, calculer $f(-x)$ et conclure avec la définition d'une fonction paire.

III. Étude des variations de la fonction carré

✒ Théorème

La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ et elle est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

☞Démonstration 2

1. ✧✧ Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$.
Comparer a^2 et b^2 en étudiant le signe de $a^2 - b^2$ (on pensera à factoriser).

2. ✧ Compléter la structure de la démonstration :
On choisit $a < b$, et on souhaite comparer a^2 et b^2. Deux cas d'études se déclineront au cours de l'étude du signe de $b^2 - a^2$ qui donnera l'ordre de a^2 et b^2.
Pour tout nombre a et b, $(a-b)(a+b) =$ ....

sur $]-\infty\,;\,0[$	sur $]0\,;\,+\infty[$
$a < b < 0$	$0 < a < b$
$b - a$........0	$b - a$........0
$b + a$........0	$b + a$........0
$(b-a)(b+a)$........0	$(b-a)(b+a)$........0
$b^2 - a^2$........0	$b^2 - a^2$........0
a^2........b^2	a^2........b^2
l'ordre entre (a et b) et (a^2 et b^2)	l'ordre entre (a et b) et (a^2 et b^2) ....
la fonction carré est .... sur	la fonction carré est .... sur ....

☞**Exercice 2**
Lorsque c'est possible, à partir des variations de la fonction carré, comparer les nombres suivants :

1. $(1,15)^2$ et $(1,16)^2$;
2. π^2 et 9 ;
3. $(-2013)^2$ et $(-2014)^2$;
4. $\left(\sqrt{2}\right)^2$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^2$;
5. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$;
6. $\left(\frac{\pi}{3}-1\right)^2$ et $\left(1-\frac{\pi}{3}\right)^2$.

IV. Représentation graphique de la fonction carré

IV. A. Table de valeurs

Avec la propriété de parité de la fonction carré, on peut ne donner les valeurs que pour x positif, les valeurs négatives s'en déduisent.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$							

IV. B. Représentation graphique :

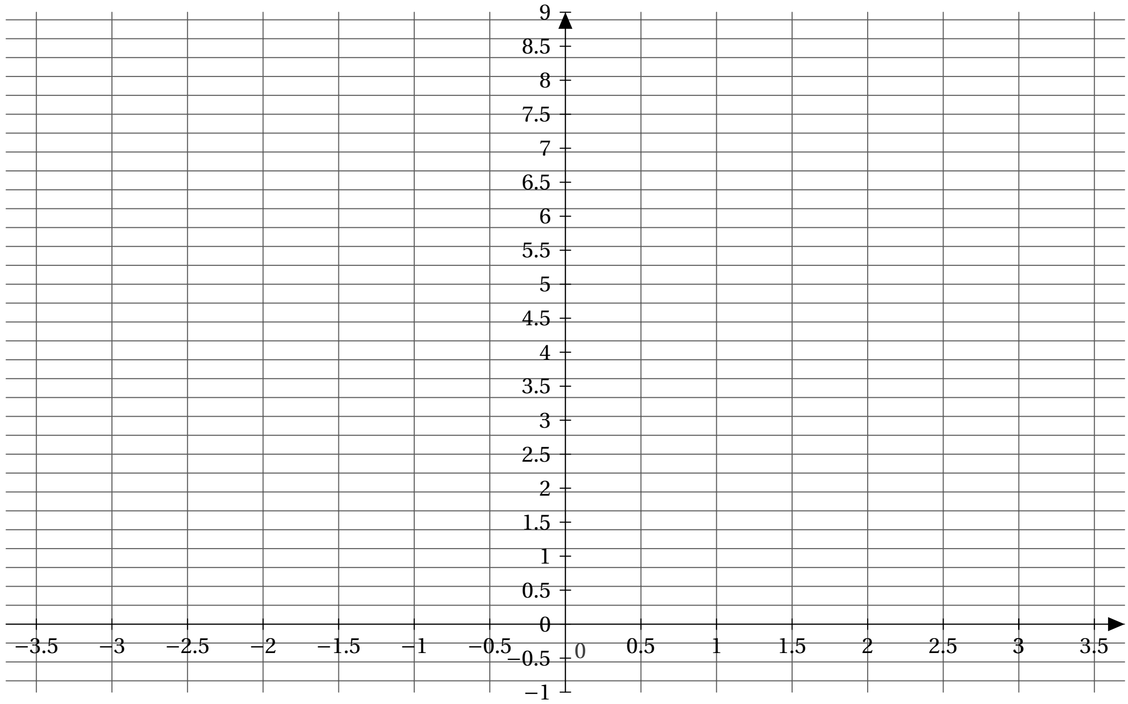
Définition

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ de la fonction carré est appelée parabole.
Son équation est $y = x^2$.

Propriété

Soit un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
La parabole admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Graphe de la fonction carré :



Retrouver les variations de la fonction carré par lecture graphique en cliquant sur le lien.

☞**Exercice 3**

À partir d'un schéma de la courbe de la fonction carré (un par question),

1. Résoudre l'équation $x^2 = 2$ (on donnera les valeurs exactes).
   lecture graphique.
2. Résoudre l'inéquation $x^2 < 1$.
   lecture graphique.
3. Résoudre l'inéquation $x^2 > 1,5$.
   lecture graphique.
4. Quel est le maximum de x^2 pour x appartient à l'intervalle $[-2;1]$.
   lecture graphique.
5. Quel est le minimum de x^2 pour x appartient à l'intervalle $[-2;1]$.
   lecture graphique.