Exercices : Variations d'une fonction

Exercice 1

1. f est une fonction croissante sur $[1\,;\,3]$, donner l'ordre entre $f(1)$ et $f(3)$.
2. g est une fonction décroissante sur $[1\,;\,3]$, donner l'ordre entre $g(1)$ et $g(3)$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} [-1\,;\,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \end{array}$$

On admet que la fonction f admet quatre et seulement quatre valeurs extrêmes locales en -1, 0, 2 et 3.
Après avoir calculer l'image de chacune de ces quatre valeurs, construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
Choisir une fenêtre adaptée pour tracer la courbe de la fonction f sur la calculatrice.

Exercice 3

On donne le tableau de variations d'une fonction f.

x	-5		-1		2		5
f	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

1. Comparer si possible :

   (a) $f(-1)$ et $f(1)$ (b) $f(0)$ et $f(3)$ (c) $f(-3)$ et $f(-2)$ (d) $f(-3)$ et $f(4)$

2. On admet que $f(-0,5) = 0$ (l'image de $-0,5$ est 0), à l'aide du tableau de variations de la fonction f, construire le tableau de signe de la fonction f.

☞Exercice 4 ✧✧

Soit f et g deux fonctions affines

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 3x - 1 \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = -2x + 5 \end{array}$$

1. Pour établir les variations de la fonction f, on choisit deux réels a et b tels que $a < b$ et on souhaite comparer $f(a)$ et $f(b)$ avec l'algorithme de calcul suivant :

   Comparer $3a$ et $3b$

   Comparer $3a - 1$ et $3b - 1$

   Donner l'ordre entre $f(a)$ et $f(b)$.

   Appliquer l'algorithme, puis donner le sens de variations de la fonction f.

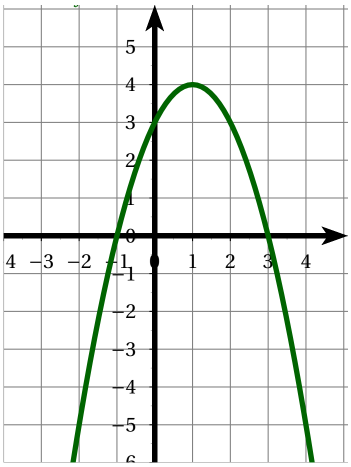
2. De la même manière que la question précédente, pour déterminer le sens de variations de la fonction g, on choisit deux réels a et b tels que $a < b$.
   Donner l'algorithme qui permet de faire les étapes de calculs pour déterminer l'ordre entre $g(a)$ et $g(b)$, appliquer l'algorithme puis déterminer le sens de variations de la fonction g.

3. Représenter dans un repère orthogonal les courbes des fonctions f et g. Vérifier le sens de variation trouvé précédemment.

4. Cas général : démontrer les variations d'une fonction affine suivant les valeurs réels de m telle que $f(x) = mx + p$ avec p réel.

☞Exercice 5 ✧✧

Soit la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ suivant :



$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = -x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

1. Construire le tableau de variations de la fonction f.

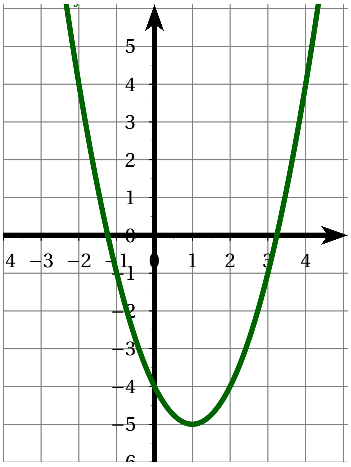
2. Donner le maximum de f sur $[-2\,;\,3]$, puis le minimum de f sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$.

3. Calculer l'image de $\alpha = -1$ et l'image de $\beta = 3$ par f.

4. Construire le tableau de signe de la fonction f.

☞Exercice 6 ✧✧

Soit la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ suivant :



$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

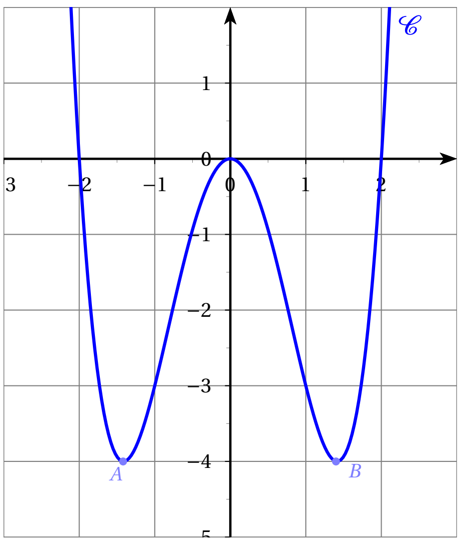
1. Construire le tableau de variations de la fonction f.
2. Donner le maximum de f sur $[-1\,;\,2]$, puis le minimum de f sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$.
3. Donner le maximum de f sur $[-2\,;\,3]$, puis le minimum de f sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$.
4. Calculer l'image de $\alpha = 1 - \sqrt{5}$ et l'image de $\beta = 1 + \sqrt{5}$ par f.
5. Construire le tableau de signe de la fonction f.

☞Exercice 7 ✧✧✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^4 - 4x^2 \end{array}$$

On donne la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère orthogonal suivant :



Les points A et B ont pour abscisse respective $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, ils sont des sommets locaux de la courbe, la courbe admet aussi un sommet local en 0.

1. Calculer l'image de $-\sqrt{2}$, puis de $\sqrt{2}$ par f.
2. À partir d'une lecture graphique, construire le tableau de variations de la fonction f.
3. Montrer que pour tous réels x, $f(x) = x^2(x-2)(x+2)$.
4. Déterminer le tableau de signe de f, vérifier graphiquement votre résultat, puis donner les solutions de l'équation $f(x) > 0$.